Zweiter Abschnitt über die Grundsätze der Bewegung von Fluiden *

Leonhard Euler

Kapitel I

Betrachtung der Bewegung von Fluiden im Allgemeinen

Problem 17

§1 *Wenn sich eine fluide Masse in irgendeiner Bewegung befindet, die Grundlagen zu erläutern, aus denen ihr Zustand und ihre Bewegung zu jeder Zeit am bequemsten erkannt werden und in einer Rechnung erfasst und dargestellt werden kann.*

Lösung

Die einzelnen Elemente des Fluids mögen auf die drei zueinander orthogonalen festen Achsen (Fig. 22) OA, OB, OC bezogen werden, sodass der Ort eines jeden in Z gelegenen Elementes durch drei jenen Achsen parallele Koordinaten bestimmt wird, welche $OX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$ seien:

*Originaltitel: "Sectio secunda de principiis motus fluidorum", erstmals publiziert in „*Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 14*, 1770, pp. 270-386", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 2, Volume 13, pp. 73 - 153 ", Eneström-Nummer E396, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Alexander Aycock, Textfiguren: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

Und weil das Fluid in Bewegung zu sein festgelegt worden ist, wollen wir ein Element betrachten, welches sich nun, nachdem eine gegebene Zeit $= t$ von einem gewissen Zeitintervall vergangen ist, im Punkt Z befinde, weil ja, während die Zeit verstreicht, die einen und die anderen Elemente des Fluids durch denselben Punkt Z hindurchfließen. Um nun den gegenwärtigen Zustand eines Fluids zu erkennen, ist, wenn seine Dichte einer Veränderung fassungsfähig ist, zuerst seine Dichte im Punkt Z zu bestimmen, welche wir mit dem Buchstaben q bezeichnen wollen; weil diese nicht nur für verschiedene Lagen des Punktes Z, sondern auch für verschiedene Zeiten verschieden sein kann, muss diese Größe q als Funktion der vier Variablen x, y, z und t betrachtet werden; wenn in dieser für t die vorgegebene Zeit geschrieben wird, anstelle von x, y und z hingegen die drei Koordinaten OX, XY, YZ, die dem Punkt Z zukommen, wird die Dichte des Fluids in Z zur vorgelegten Zeit erhalten. Wenn die Dichte des Fluids aber überall und ununterbrochen dieselbe ist, wird der Buchstabe q eine Konstante Größe bezeichnen.

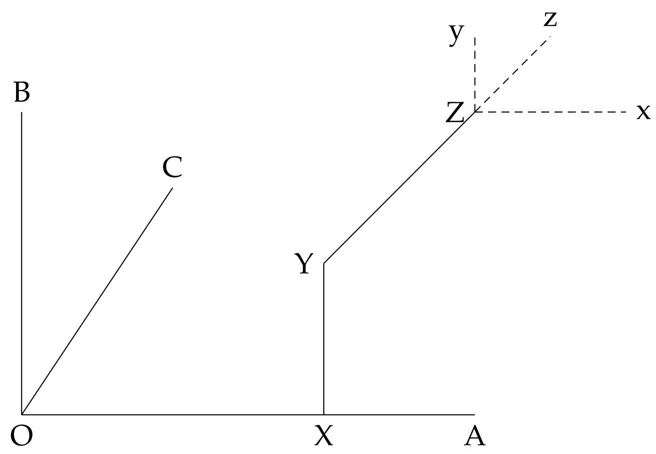


Fig. 22

An zweiter Stelle muss auch der Druck an der Stelle Z bekannt sein, der mit der Höhe $= p$ ausgedrückt werde, welche natürlich einer aus einer homogenen Materie, deren Dichte $= 1$ ist, bestehenden Säule zugeteilt werden muss, damit ihr Gewicht dem auf dem Säulenfuß ausgeübten Druck gleich wird, und für das Verhältnis dieser mit der Einheit ausgedrückten Dichte ist ununterbrochen jene Dichte q zu messen. Weil sich also auch diese Höhe mit dem Ort sowie der Zeit verschieden sein kann, muss auch p wie eine Funktion der vier Variablen x, y, z und t behandelt werden.

Als drittes ist es, wenn das Fluid Kräftewirkungen wie der Schwerkraft und anderen ähnlichen unterworfen ist, möglich, diese Kräfte immer in drei in die Richtungen der Koordinatenachsen aufzuteilen. Diese beschleunigenden das

Element in die Lage Z zwingenden Kräfte seien also in Richtung $Zx = X$, in Richtung $Zy = Q$ und in Richtung $Zz = R$, nachdem die natürliche Schwerkraft $= 1$ gesetzt worden ist.

Als viertes ist für die Erkenntnis der Bewegung besonders wichtig, die Bewegung eines jeden Elementes zu einer jeden Zeit zu kennen, welche Bewegung mit dem größten Vorteil in die in die Richtungen der drei Achsen aufgelöst wird. Für die Zeit $= t$ sei also die Geschwindigkeit des in Z befindlichen Elements in Richtung $Zx = u$, in Richtung $Zy = v$ und in $Zz = w$, welche drei Geschwindigkeiten daher als Funktionen der vier Variablen x, y, z und t angesehen werden müssen. An dieser Stelle tritt es schnell klar zutage, dass die Rechnung so aufgebaut werden kann, dass die Zeit t in Minutensekunden, die Geschwindigkeiten u, v, w durch die in einer Minutensekunde zu durchlaufenden Räume ausgedrückt werden.

KOROLLAR 1

§2 Die vollkommene Erkenntnis des Zustandes und der Bewegung von Fluiden ist also in diesen vier Hauptgrößen, die wir dargestellt haben, enthalten, natürlich der Dichte, dem Druck, den auf selbiges wirkenden Kräften und den drei Geschwindigkeiten eines jeden Elementes; wenn wir diese zu jeder Zeit angeben können, werden wir ein vollkommenes Verständnis der ganzen Bewegung erlangt haben.

KOROLLAR 2

§3 Die Kräfte, von welchen das Fluid angegriffen wird, sind freilich immer unabhängig von allem gegeben, und hängen selbst nicht von der Bewegung ab: So sind, obgleich die Bewegung unbekannt ist, die Kräfte P, Q, R, von welchen die einzelnen Elemente angeregt werden, zu den bekannten Größen zu zählen, und hauptsächlich aus diesen werden die übrigen Hauptgrößen bestimmt werden.

KOROLLAR 3

§4 Wann immer das Fluid homogen ist und seine Dichte keiner Veränderung unterworfen ist, wird auch die Größe q gegeben sein, wenn es aber entweder heterogen ist oder jedes einzelne Teilchen eine variable Dichte hat, ist vor allem notwendig, dass, während die Bewegung stattfindet, für den beliebigen

Punkt Z die Dichte des sich dort befindenden Teilchen ausfindig gemacht wird.

KOROLLAR 4

§5 Die ganze Theorie der Bewegung von Fluiden basiert also darauf, dass für gegebene Natur des Fluids und die angreifenden Kräfte die Größen q, p, u, v, w bestimmt und so mit den vier Variablen x, y, z und t ausgedrückt werden, dass deren Werte so für den beliebig gewählten Punkt Z wie zu jeder Zeit t angegeben werden können.

BEMERKUNG 1

§6 Weil diese Größen q, p, u, v, w wie Funktionen dieser vier Variablen x, y, z und t behandelt werden müssen, wird das im Allgemeinen genommene Differential einer jeden so ausgedrückt werden:

$$dq = dx\left(\frac{dq}{dx}\right) + dy\left(\frac{dq}{dy}\right) + dz\left(\frac{dq}{dz}\right) + dt\left(\frac{dq}{dt}\right),$$

die drei ersten Anteile welcher Form das Inkrement der Dichte, die nun in Z als $= q$ festgelegt wird, darbieten, während wir, wobei die Zeit t dieselbe bleibt, zu einem anderen selbigem Z sehr nahen Punkt übergehen, dessen Ort mit diesen drei Koordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ bestimmt wird, und so wird eingesehen, auf welche Weise sich, nachdem die Zeit t als konstant angenommen worden ist, in jedem beliebigen Moment durch die ganze Masse des Fluids hindurch die Dichte in den einzelnen Punkten verhalten wird, was auf die gleiche Weise über den Druck und die drei Geschwindigkeiten der einzelnen Elemente zu verstehen ist; und dies ist freilich auch aus der Natur der Differentiale per se klar. Aber wenn, während die Koordinaten x, y, z dieselben bleiben, die Zeit t um ihr Differential dt vermehrt wird, so wird die Dichte nun $q + dt\left(\frac{dq}{dt}\right)$ werden, welche aber keineswegs die in dem winzig kleinen Zeitabschnitt dt veränderte Dichte eine Elements des Fluids, welches Element sich in Z befunden hatte, angibt, wie es jemandem, der nicht achtsam genug ist, erscheinen könnte, sondern die Formel wird vielmehr die Dichte eines anderen Elements, welches erst nach Ablauf des infinitesimalen Zeitabschnitts dt durch den Punkt Z hindurchgehen wird, aufzeigen. Wannimmer wir aber die im winzig kleinen Zeitabschnitt dt veränderte Dichte desselben Elementes des Fluids, welches sich im Punkt Z befand und dessen Dichte $= q$

war, bestimmen wollen, müssen wir vor allem auf den Ort, wo sich dieses Element nach diesem sehr kleinen Zeitintervall dt aufhalten wird, achten; wenn dieser mit diesen drei Koordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ angezeigt wird, wird der wahre Zuwachs der Dichte dieser sein:

$$dq = dx\left(\frac{dq}{dx}\right) + dy\left(\frac{dq}{dy}\right) + dz\left(\frac{dq}{dz}\right) + dt\left(\frac{dq}{dt}\right).$$

Und dieselbe Vorsicht ist walten zu lassen, wenn wir nach Ablauf der Zeit dt entweder den Druck oder die mit den drei Geschwindigkeiten u, v, w bestimmte Bewegung desselben Elementes des Fluids, welches Element sich dann im Punkt Z befunden hatte, angeben müssen. Diese Achtsamkeit ist umso notwendiger und es ist umso mehr Obacht zu geben, weil wir sonst aufgrund einer Unachtsamkeit schwerwiegende Fehler begehen könnten.

Bemerkung 2

§7 Um also weiter die Bewegung des Fluids zu erkennen, ist es notwendig, die Bewegung seiner Elemente zu kennen, und es ist keineswegs hinreichend, wie es bei Festkörpern der Fall zu sein pflegt, nur die Bewegung einiger Punkte ausfindig gemacht zu haben. Natürlich wird bei der Bewegung von Festkörpern in dem Moment, in welchem die Bewegung dreier nicht auf einer Gerade gelegenen Punkte bekannt geworden ist, daher zugleich die Bewegung aller übrigen Punkte des ganzen Festkörpers bestimmt; und wenn der Körper biegsam ist, werden freilich mehrere Punkte zur Bestimmung der Bewegung des ganzen Körpers verlangt, deren Anzahl aber dennoch immer endlich ist. Bei Fluiden können sich die einzelnen Elemente aber ganz eigentümlich bewegen, so dass, auch wenn wir die Bewegung von tausend Teilchen ermittelt hätten, die ganze Bewegung mit ihnen immer noch nicht bestimmt ist. Und dennoch ist dies nicht so zu aufzufassen, dass die Bewegungen der einzelnen Elemente in gar keiner Weise voneinander abhängen; wenn die Dichte des Fluids nämlich keine Veränderung zulässt, dann ist es ersichtlich, dass die einzelnen Teilchen nicht in einer solchen Weise vorwärts fließen können, dass sie entweder in einen größeren Raum verstreut werden oder in einem kleinen zusammengedrängt werden, woher natürlich eine gewisse Bedingung für die Bewegungen der einzelnen Teilchen festgelegt wird. Aber auch wenn das Fluid einer Verdichtung oder Verdünnung fassungsfähig ist, kann eine solche Veränderung dennoch nicht ohne Berücksichtigung des Drucks stattfinden, woraus wegen des Druckes alle Bewegungen aller Teilchen von einem gewissen Gesetz eingeschränkt werden. Diese Einschränkung selbst ist aber das wichtigste Kapitel in der Theorie der Bewegung von Fluiden, welches leicht erkannt wird darauf zurückgeführt zu werden, dass, nachdem die Bewegung aller Elemente als bekannt angesehen worden ist, die Veränderung sowohl der Dichte als auch der Bewegung eines jeden Punktes ausfindig gemacht wird.

BEMERKUNG 3

§8 Jene vier Hauptgrößen, von welchen wir gesagt haben, dass in ihnen die vollständige Erkenntnis der Bewegung von Fluiden enthalten ist, werden vielleicht einigen erscheinen für dieses Ziel nicht zu genügen, weil es ja meistens von Nöten ist, auf mehrere andere Umstände zu achten; wie wenn das Fluid beispielsweise in einem Gefäß eingeschlossen ist, durch welches es entweder hindurchfließen soll oder aus welchem es dann wieder herausfließen soll, so ist es notwendig zu jeder Zeit zu wissen, bis wohin sich das Fluid in dem Gefäß ausbreitet und zugleich muss die Form des Gefäßes selbst vollkommen klar sein: Dann scheinen, wenn das Fluid und seine Bewegung zumindest teilweise klar ist, natürlich da, wo kein Druck herrscht, auch diese Umstände vollkommen notwendig zu sein, um die weitere Bewegung zu bestimmen. Aber hier ist es im Allgemeinen nur festzuhalten, dass die vier erläuterten Hauptgrößen völlig ausreichen, um die Bewegung mit Differentialgleichungen zu beschreiben, worin die Tragweite der Bewegungslehre ja hauptsächlich besteht. Aber erst dann, nachdem diese Gleichungen gefunden worden sind und sie anschließend integriert werden müssen, gehen alle äußeren Umstände in die Rechnung ein und die Analysis wird immer entdeckt werden so an alle Fälle angepasst zu sein, dass all jenen Bedingungen, welche auch immer die äußeren Umstände eben vorschreiben, immer vollkommen Genüge geleistet werden kann.

PROBLEM 18

§9 *Nachdem die einzelnen Geschwindigkeiten u, v und w gegeben worden sind, mit welchen die einzelnen Elemente des Fluids bewegt werden, die im unendlich kleinen Zeitintervall dt vollführte Translation irgendeines beliebigen Teilchens des Fluids ausfindig zu machen.*

Lösung

Wir wollen dem Molekül (Fig. 23), dessen Translation wir suchen, die Form der triangularen Pyramide $ZLMN$ zuteilen, für deren vier Ecken die drei Koordinaten diese sein:

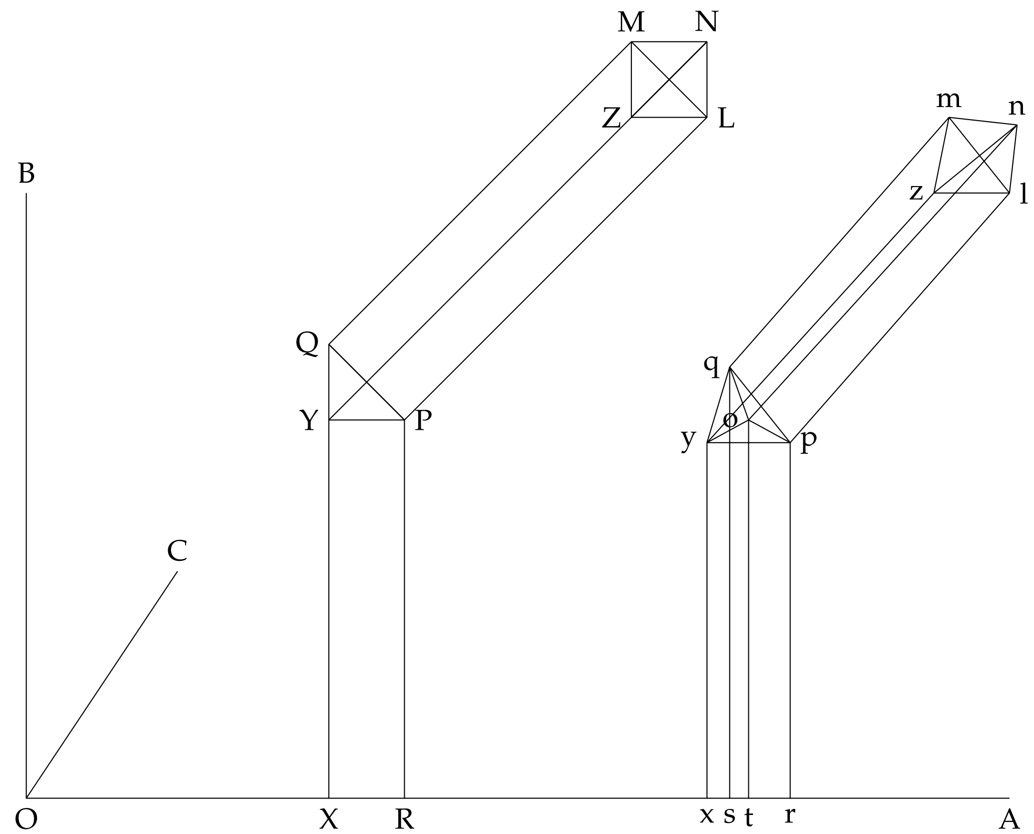


Fig. 23

Für	Z	$OX = x,$	$XY = y,$	$YZ = z$
Für	L	$OR = x + dx,$	$RP = y,$	$PL = z$
Für	M	$OX = x,$	$XQ = y + dy,$	$QM = z$
Für	N	$OX = x,$	$XY = y,$	$YN = z + dz.$

Weil nun für diesen Punkt Z die Geschwindigkeiten in die den Achsen parallelen Richtungen, also u, v, w, Funktionen der vier Variablen x, y, z und t sind, werden sich diese Geschwindigkeiten für die einzelnen Ecken so verhalten:

	Die Geschwindigkeit	Die Geschwindigkeit	Die Geschwindigkeit
Für Z	in Richt. $OA = u$,	in Richt. $OB = v$,	in Richt. $OC = w$,
Für L	in Richt. $OA = u + dx\left(\frac{du}{dx}\right)$,	in Richt. $OB = v + dx\left(\frac{dv}{dx}\right)$,	in Richt. $OC = w + dx\left(\frac{dw}{dx}\right)$,
Für M	in Richt. $OA = u + dy\left(\frac{du}{dy}\right)$,	in Richt. $OB = v + dy\left(\frac{dv}{dy}\right)$,	in Richt. $OC = w + dy\left(\frac{dw}{dy}\right)$,
Für N	in Richt. $OA = u + dz\left(\frac{du}{dz}\right)$,	in Richt. $OB = v + dz\left(\frac{dv}{dz}\right)$,	in Richt. $OC = w + dz\left(\frac{dw}{dz}\right)$.

Mit diesen Geschwindigkeiten werden diese vier Größen Z, L, M, N im winzig kleinen Zeitabschnitt dt also zu den Punkten z, l, m, n hinüberbewegt, welche mit den folgenden drei Koordinaten bestimmt werden werden:

$$Ox = x + udt, \qquad xy = y + vdt,$$
$$yz = z + wdt$$
$$Or = x + dx + udt + dtdx\left(\frac{du}{dx}\right), \qquad rp = y + vdt + dtdx\left(\frac{dv}{dt}\right),$$
$$pl = z + wdt + dtdx\left(\frac{dw}{dt}\right)$$
$$Os = x + udt + dtdy\left(\frac{du}{dy}\right), \qquad sq = y + dy + vdt + dtdy\left(\frac{dv}{dy}\right),$$
$$qm = z + wdt + dtdy\left(\frac{dw}{dy}\right)$$

$$Ot = x + udt + dtdz \left(\frac{du}{dz}\right), \quad to \ = y + vdt + dtdz \left(\frac{dv}{dz}\right),$$
$$on = z + dz \ + wdt + dtdz \left(\frac{dw}{dt}\right).$$

Also wird die in der Pyramide $ZLMN$ enthaltene Materie des Fluids so bewegt, dass sie nach Verstreichen des winzig kleinen Zeitabschnitts dt die Pyramide $zlmn$ definiert und diese vollständig ausfüllt. Weil die Pyramide $ZLMN$ unendlich klein ist, ist es, wie unregelmäßig die Bewegung auch immer war, notwendig, dass alle in der Pyramide $ZLMN$ enthaltenen Punkte so bewegt werden, dass sie ununterbrochen von den Seitenflächen der Pyramide eingeschlossen werden und dieser Zustand sich auch nicht ändert; und so ist die Seitenfläche ZLM zu verstehen zu zlm zu gelangen, selbiges ist von den übrigen zu verstehen.

KOROLLAR 1

§10 Obgleich also unter Umständen die Form des pyramidalen Moleküls $ZLMN$ verändert wird, behält es dennoch die Form einer triangularen Pyramide bei; daher wird, weil jedes beliebige Molekül in Pyramiden von dieser Art aufgelöst werden kann, wird auch seine Form, die selbigem wegen der Bewegung aufgeprägt wird, daher erschlossen werden können.

KOROLLAR 2

§11 Weil die Grundseiten der Pyramide $ZLMN$ $Zl = dx$, $ZM = dy$ und $ZN = dz$ sind, die zueinander normal sind, werden die übrigen diese sein:

$$LM = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad LN = \sqrt{dx^2 + dz^2} \quad \text{und} \quad MN = \sqrt{dy^2 + dz^2}$$

und der Rauminhalt dieser Pyramide wird $= \frac{1}{6}dxdydz$ sein, weil die Fläche der Basis ZLM deswegen $= \frac{1}{2}dxdy$ und die Höhe $ZN = dz$ ist.

BEMERKUNG 1

§12 Nun werden wir also auch die Seiten der translatierten Pyramide $zlmn$ bestimmen können. Zuerst wird nämlich wegen

$$Or - Ox = dx + dtdx\left(\frac{du}{dx}\right),\ \ rp - xy = dtdx\left(\frac{dv}{dx}\right),\ \ pl - yz = dtdx\left(\frac{dt}{dx}\right)$$

gelten

$$zl = \sqrt{dx^2 + 2dtdx^2\left(\frac{du}{dx}\right)} = dx + dtdx\left(\frac{du}{dx}\right),$$

weil es möglich ist, die Anteile unter dem Wurzelzeichen, wo die Differentiale zu vier Dimensionen ansteigen, zu verwerfen; in gleicher Weise wird gelten

$$zm = dy + dtdy\left(\frac{dv}{dy}\right) \quad \text{und} \quad zn = dz + dtdz\left(\frac{dw}{dz}\right),$$

des Weiteren wird für die Seite lm wegen

$$\begin{aligned} Or - Os &= dx + dtdx\left(\frac{du}{dx}\right) - dtdy\left(\frac{du}{dy}\right) \\ sq - rp &= dy - dtdx\left(\frac{dv}{dx}\right) + dtdy\left(\frac{dv}{dy}\right) \\ qm - pl &= -dtdx\left(\frac{dw}{dx}\right) + dtdy\left(\frac{dw}{dy}\right) \end{aligned}$$

gelten

$$lm = \sqrt{dx^2 + dy^2 + 2dtdx^2\left(\frac{du}{dx}\right) - 2dtdxdy\left(\frac{du}{dy}\right) - 2dtdxdy\left(\frac{dv}{dx}\right) + 2dtdy^2\left(\frac{dv}{dy}\right)}$$

oder

$$lm = \sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{dtdx^2\left(\frac{du}{dx}\right) - dtdxdy\left(\frac{du}{dy}\right) - dtdxdy\left(\frac{dv}{dx}\right) + dtdy^2\left(\frac{dv}{dy}\right)}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Daraus wird aber der Winkel lmz in angenehmer Weise bestimmt, weil nämlich gilt:

$$\cos(lmz) = \frac{zl^2 + zm^2 - lm^2}{2zl \cdot zm},$$

wird aufgefunden

$$\cos(lzm) = \frac{2dtdxdy\left(\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\right)}{2dxdy} = dt\left(\frac{du}{dy}\right) + dt\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

welcher Winkel also unendlich wenig vom rechten abweicht; auf ähnliche Weise wird aber gefunden

$$\cos(lzn) = dt\left(\frac{du}{dz}\right) + dt\left(\frac{dw}{dx}\right) \quad \text{und} \quad \cos(mzn) = dt\left(\frac{dv}{dz}\right) + dt\left(\frac{dw}{dy}\right),$$

woher es klar zutage tritt, dass die Sinus dieser Winkel so nahe an den ganzen Sinus herankommen, dass die Abweichung mit Differentialen zweiten Grades ausgedrückt wird.

Bemerkung 2

§13 Wenn die Frage über die Bewegung von Festkörpern gestellt werden würde, deren Elemente so beschaffen sind, dass sie weder in ihrer Größe noch in ihrer Gestalt eine Veränderung zulassen, müsste die Pyramide $zlmn$ der Pyramide $ZLMN$ vollkommen gleich sein, woher die Gleichheit der Grundseiten diese Gleichungen an die Hand gäbe

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{dv}{dy}\right) = 0, \quad \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0,$$

die Gleichheit der übrigen Seiten hingegen diese

$$\left(\frac{du}{dy}\right) + \left(\frac{dv}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{dv}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dy}\right) = 0.$$

Deshalb müssen diese drei Geschwindigkeiten u, v, w eines jeden Punktes für Festkörper notwendigerweise solche Funktionen der vier Variablen x, y, z und t sein, dass sie diese sechs Bedingungen erfüllen. Aus den drei ersten folgt freilich, dass die Geschwindigkeit u nicht von x abhängen kann, analog v nicht von y und w auch nicht von z. Des Weiteren folgt daher, weil

$\left(\frac{du}{dy}\right) = -\left(\frac{dv}{dx}\right)$ ist, dass die Formel $udx - vdy$ integrierbar sein muss, wenn freilich allein x und y wie Variablen betrachtet werden; dann werden aber in gleicher Weise diese Differentialformeln $udx - wdz$ und $vdy - wdz$ integrierbar sein müssen, aus welchen Bedingungen die Bewegung von Festkörpern auf dieselbe Weise bestimmt zu werden aufgefunden wird, auf welche sie aus anderen Prinzipien bestimmt zu werden pflegt. Aus diesem Fall wird aber eingesehen, dass auch für Fluide diese drei Geschwindigkeiten gewissen Bedingungen angepasst werden; wenn das Fluid nämlich von solcher Gestalt ist, dass seine Dichte keine Veränderung zulässt, dann ist es vollkommen notwendig, dass das Volumen der Pyramide $zlmn$ dem Volumen der Pyramide $ZLMN$ gleich ist; und wenn die Dichte eine Veränderung zulässt, wird aus dieser Veränderung selbst das Volumen $zlmn$ bestimmt, umgekehrt wird aber aus diesem Volumen die Veränderung erschlossen werden können, woher sich das folgende Problem ergibt.

PROBLEM 19

§14 *Nachdem die drei Geschwindigkeiten u, v, w gegeben worden sind, mit welchen die einzelnen Elemente des Fluids bewegt werden, die Veränderung der Dichte ausfindig zu machen, welche die einzelnen Elemente, während sie im unendlich kurzen Zeitintervall dt vorwärts getragen werden, erfahren.*

LÖSUNG

Wie zuvor (Fig. 23) werde das Element $ZLMN$ des Fluids betrachtet, welches Element eine pyramidale Form habe und dessen Dichte in diesem Zustand $= q$ sei: Weil das Volumen dieser Pyramide, nachdem die drei Koordinatenachsen $OX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$ gesetzt worden sind, also $= \frac{1}{6}dxdydz$ ist, wird die Masse dieses Elements $= \frac{1}{6}qdxdydz$ sein, welche auch bei der Bewegung ununterbrochen dieselbe bleibt, auf welche Weise auch immer zwischenzeitlich das Volumen entweder vermehrt oder vermindert wird. Aber wegen der Bewegung, welche wir diesem Element zugeschrieben haben, wird es im infinitesimalen Zeitabschnitt dt zu $zlmn$, dessen Form ebenfalls die einer Pyramide ist, vorwärts bewegt werden, und wir haben gesehen, dass ihre Grundseiten diese sind:

$$zl = dx + dtdx\left(\frac{du}{dx}\right), \quad zm = dy + dtdy\left(\frac{dv}{dy}\right), \quad zn = dz + dtdz\left(\frac{dw}{dz}\right),$$

weiter haben wir aber gesehen, dass die Winkel zu z so beschaffen sind, dass gilt

$$\cos(lmz) = dt\left(\frac{du}{dy}\right) + dt\left(\frac{dv}{dx}\right),\ \cos(lnz) = dt\left(\frac{du}{dz}\right) + dt\left(\frac{dw}{dx}\right),\ \cos(mzn) = dt\left(\frac{dv}{dz}\right) + dt\left(\frac{dw}{dy}\right),$$

woraus das Volumen dieser Pyramide bestimmt werden muss. Wenn wir daher der Kürze wegen folgendes festlegen

$$\cos(lmz) = \nu, \quad \cos(lnz) = \mu \quad \text{und} \quad \cos(mnz) = \lambda,$$

wird das Volumen dieser Pyramide aus der Geometrie so ausgedrückt aufgefunden

$$= \tfrac{1}{6} zl \cdot zm \cdot zn \sqrt{1 - \lambda\lambda - \mu\mu - \nu\nu + 2\lambda\mu\nu}.$$

Weil ja λ, μ, ν aber Differentiale erster Ordnung sind, steigen deren Quadrate zur zweiten Ordnung an, woher dieses Volumen ohne Fehler $= \frac{1}{6} zl \cdot zm \cdot zn$ gesetzt wird, und so wird es dann sein

$$= \tfrac{1}{6} dxdydz \left(1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right)\right)\left(1 + dt\left(\frac{dv}{dy}\right)\right)\left(1 + dt\left(\frac{dw}{dz}\right)\right)$$

und nach Ausmultiplizieren und Verwerfen der höheren Differentiale geht das Volumen der Pyramide $zlmn$ hervor als

$$= \tfrac{1}{6} dxdydz \left(1 + dt\left(\frac{du}{dx}\right) + dt\left(\frac{dv}{dy}\right) + dt\left(\frac{dw}{dz}\right)\right);$$

Nun werde die Dichte dieser Pyramide $= q'$ gesetzt; weil diese mit ihrem Volumen multipliziert die Masse der Pyramide $ZLMN$ ergeben muss, werden wir, indem wir auf beiden Seiten durch $\frac{1}{6} dxdydz$ dividieren, diese Gleichung haben:

$$q = q' + q' dt\left(\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right)\right).$$

Der Zuwachs der Dichte $q' - q$ wird also so ausgedrückt, dass gilt

$$\frac{q' - q}{q' dt} = \frac{q' - q}{q dt} = -\left(\frac{du}{dx}\right) - \left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{dw}{dz}\right).$$

Korollar 1

§15 Wenn die einzelnen Elemente des Fluides während der Bewegung also keine Veränderung in ihrer Dichte zulassen, müssen die drei Geschwindigkeiten u, v und w Funktionen solcher Art von x, y, z und t sein, dass gilt

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0.$$

Korollar 2

§16 Umgekehrt wird also, sooft galt

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0,$$

die Dichte des Fluids durch die Bewegung der einzelnen Elemente nicht verändert. Dies passiert es also unter unzähligen anderen Fällen, wenn weder u von x noch v von y und auch w nicht von z abhängt.

Korollar 3

§17 Sooft die Dichte der einzelnen Teilchen des Fluids bei der Bewegung verändert wird, wird ihre Veränderung aus dem Wert der Formel $\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0$ erkannt; wo dieser positiv war, nimmt die Dichte ab, wo er negativ war, dort wird die Dichte zunehmen.

Bemerkung

§18 Die hier verwendete Methode, das Volumen der Pyramide $zlmn$ ausfindig zu machen, ist um vieles gefälliger und leichter als die, die ich einst in Vol. XI. Mem. Acad. Reg. Boruss. gebraucht habe, wo ich erst über viele Umwege dieselbe Formel für dieses Volumen gefunden habe, indem ich das Finden von dieser auf triangulare Prismen zurückgeführt habe. Der Rechenvorteil ist hier aber entstanden, weil die drei Winkel lmz, lzn, mzn unendlich wenig vom rechten Winkel abweichen und dieser Unterschied sogar durch die Quadrate von Differentialen ausgedrückt wird; wenn dies, sehr zu unserem Vorteil, nicht passiert wäre, wäre die andere vorzuziehen gewesen. Weil die Pyramide $zlmn$ natürlich der Summe dieser drei Prismen gleich wird

$$ypozln + yqozmn + poqlmn, \quad \text{nach Wegnehmen der vierten} \quad ypqzlm,$$

wird sie sein

$$= \tfrac{1}{3}\triangle ypo(yz + pl + on) + \tfrac{1}{3}\triangle yqo(yz + qm + +on) + \tfrac{1}{3}\triangle poq(pl + qm + on)$$
$$- \tfrac{1}{3}\triangle ypq(yz + pl + qm),$$

welche auf diese Form zurückgeführt wird

$$\tfrac{1}{3}(\triangle ypo + \triangle yqo + \triangle poq)(yz + pl + qm + on)$$

$$- \tfrac{1}{3}\triangle ypo \cdot qm - \tfrac{1}{3}\triangle yqo \cdot pl - \tfrac{1}{3}\triangle poq \cdot yz$$
$$- \tfrac{1}{3}\triangle ypq(yz + pl + qm + on) + \tfrac{1}{3}\triangle ypq \cdot on,$$

woher wegen $\triangle ypq = \triangle ypo + \triangle yqo + \triangle poq$ die Pyramide wird

$$zlmn = \tfrac{1}{3}on \cdot \triangle ypq - \tfrac{1}{3}qm \cdot \triangle ypo - \tfrac{1}{3}pl \cdot \triangle yqo - \tfrac{1}{3}yz \cdot \triangle poq.$$

Nun werden diese Dreiecke weiter so darstellt:

$$\triangle ypq = \tfrac{1}{2}xs(xy + sq) + \tfrac{1}{2}sr(rp + sq) - \tfrac{1}{2}xr(xy + rp)$$
$$= \tfrac{1}{2}(xs + rs)(xy + rp + sq) - \tfrac{1}{2}xs \cdot rp - \tfrac{1}{2}sr \cdot xy - \tfrac{1}{2}(xy + rp + sq) + \tfrac{1}{2}xr \cdot sq$$

und daher

$$\triangle ypq = \tfrac{1}{2}xr \cdot sq - \tfrac{1}{2}xs \cdot rp - \tfrac{1}{2}sr \cdot xy$$

und in gleicher Weise

$$\triangle ypo = \tfrac{1}{2}xr \cdot to - \tfrac{1}{2}xt \cdot rp - \tfrac{1}{2}tr \cdot xy$$
$$\triangle yqo = \tfrac{1}{2}xt \cdot sq - \tfrac{1}{2}xs \cdot to - \tfrac{1}{2}st \cdot xy$$
$$\triangle poq = \tfrac{1}{2}rt \cdot sq - \tfrac{1}{2}st \cdot rp - \tfrac{1}{2}sr \cdot to,$$

aus welchen schließlich erschlossen wird

$$\begin{aligned} 6zlmn = {} & on \cdot xr \cdot sq - on \cdot xs \cdot rp - on \cdot sr \cdot xy \\ & - qm \cdot xr \cdot to + qm \cdot xt \cdot rp + qm \cdot tr \cdot xy \\ & - pl \cdot xt \cdot sq + pl \cdot xs \cdot to + pl \cdot st \cdot xy \\ & - yz \cdot rt \cdot sq + yz \cdot st \cdot rp + yz \cdot sr \cdot to. \end{aligned}$$

Weil ja nun all diese Strecken oben bestimmt worden sind, wird das Volumen dieser Pyramide daraus rational ausgedrückt werden und nach Einsetzen der Werte wird diese Form zu dem gerade gefundenen kürzeren Ausdruck zusammengezogen.

PROBLEM 20

§19 *Nachdem die drei Geschwindigkeiten u, v und w gegeben worden sind, mit welchen die einzelnen Elemente des Fluids bewegt werden, die Beschleunigung ausfindig zu machen, welche ein jedes Element im unendlich kleinen Zeitintervall dt erfährt.*

LÖSUNG

Wir wollen (Fig. 24) uns eine schon durch den Punkt Z hindurchfließendes mit den Koordinaten $OX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$ bestimmtes Element vorstellen, welches von den Geschwindigkeiten u, v und w getragen nach Ablauf der Zeit dt zum Punkt z gelange. Dieser Punkt wird also mit diesen drei Koordinaten bestimmt werden

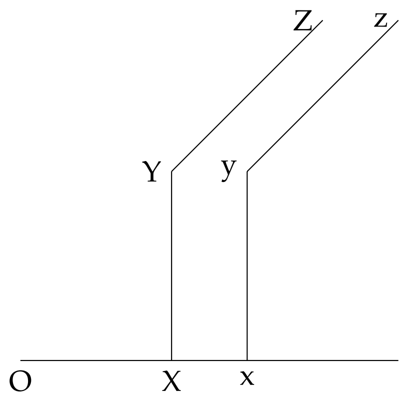


Fig. 24

$Ox = x + udt, \quad xy = y + vdt \quad \text{und} \quad yz = z + qdt$

bestimmt werden. Nachdem all dies festgelegt worden ist, wird gesucht, wie sehr die drei Geschwindigkeiten, welche das Element nun in z haben wird und welche u', v', w' seien, jene drei Geschwindigkeiten u, v, w überragen werden, welche das Element in Z hatte - weil ja aus diesen Inkrementen die Beschleunigung einzuschätzen ist. Weil u, v und w nun Funktionen der vier Variablen x, y, z und t sind, werden die gesuchten Geschwindigkeiten in z nach Verstreichen des winzig kleinen Zeitabschnitts dt daraus erschlossen werden, wenn die Variablen x, y, z und t um diese Inkremente udt, vdt, wdt und dt vermehrt werden: Deswegen schließen wir

$$\begin{aligned}
u' &= u + udt\left(\frac{du}{dx}\right) + vdt\left(\frac{du}{dy}\right) + wdt\left(\frac{du}{dz}\right) + dt\left(\frac{du}{dt}\right) \\
v' &= v + udt\left(\frac{dv}{dx}\right) + vdt\left(\frac{dv}{dy}\right) + wdt\left(\frac{dv}{dz}\right) + dt\left(\frac{dv}{dt}\right) \\
w' &= w + udt\left(\frac{dw}{dx}\right) + vdt\left(\frac{dw}{dy}\right) + wdt\left(\frac{dw}{dz}\right) + dt\left(\frac{dw}{dt}\right).
\end{aligned}$$

Weil ja bei der Untersuchung der Bewegung der Geschwindigkeitszuwachs durch den winzig kleinen Zeitabschnitt dividiert die Beschleunigung gibt, werden sich die drei gesuchten Beschleunigungen so verhalten:

$$\begin{aligned}
\frac{u'-u}{dt} &= u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + u\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right) \\
\frac{v'-v}{dt} &= u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + u\left(\frac{dv}{dz}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right) \\
\frac{w'-w}{dt} &= u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + u\left(\frac{dw}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dt}\right).
\end{aligned}$$

Korollar 1

§20 Also müssen dieselben Beschleunigungen aus den Kräften resultieren, von denen das Fluid angegriffen wird, wo es freilich nötig ist, dass die angreifenden Kräfte in dieselben drei Richtungen aufgelöst werden.

Korollar 2

§21 Die einzelnen Geschwindigkeitszuwächse hängen also auch von den zwei übrigen Geschwindigkeiten ab; und daher lässt sich die in der Mechanik übliche Regel hier nicht verwenden, nach welcher die Beschleunigung durch die Zeitableitung der Geschwindigkeit u, also durch $\frac{du}{dt}$ ausgedrückt zu werden pflegt.

Bemerkung

§22 Der Grund, warum wir hier gezwungen sind von dieser gewöhnlichen Regel abzusehen und sie nicht zu verwenden, ist aus dem Vorhergehenden, wo wir die Bedeutung der Geschwindigkeiten u, v, w dargestellt haben, hinreichend klar. Diese Geschwindigkeiten sind nämlich nicht so beschaffen, dass sie immer auf dasselbe Element des Fluids bezogen sind, wie es bei der Bewegung von Festkörpern zu geschehen pflegt, so dass sie bei gleichbleibenden Koordinaten x, y, z, wenn allein die Zeit t variabel festgelegt wird, die Bewegung des Elementes angeben werden, welches nach Ablauf des sehr kleinen Zeitintervalls dt durch den Punkt Z hindurchgeht. Daher müssen, weil hier die Beschleunigungen desselben Elements, welches nun in Z, nach dem infinitesimalen Zeitabschnitt dt hingegen in z aufgefunden wird, verlangt werden, jene Funktionen u, v und w, nicht nur während des Zeitintervalls dt, sondern auch vom Punkt Z auf den Punkt z übertragen werden, deren Übertrag über jene dann die Geschwindigkeitszuwächse desselben Elements des Fluids anzeigen wird. Wir hätten also einen riesigen Fehler begangen, wenn wir, von jener gewöhnlichen Regel dazu verleitet, diese Beschleunigungen einfach mit den Formeln $\left(\frac{du}{dt}\right)$, $\left(\frac{dv}{dt}\right)$, $\left(\frac{dw}{dt}\right)$ ausgedrückt hätten, welche, wie wir nun gesehen haben, nur einen Teil der wahren Beschleunigungen darstellen.

Problem 21

§23 *Wenn außer den drei Geschwindigkeiten u, v, w, die den einzelnen Punkten des Raumes, durch welchen das Fluid hindurchbewegt wird, zukommen, auch die Dichte q in jedem beliebigen Punkt gegeben ist, die Relation, die zwischen den Geschwindigkeiten und der Dichte einhergeht, ausfindig zu machen.*

Lösung

In Problem 19 haben wir gefunden, dass, wenn ein Teilchen im winzig kleinen Zeitabschnitt dt mit diesen Geschwindigkeiten u, v, w von Z zu z bewegt wird und seine Dichte in $Z = q$, in z hingegen q' gesetzt wird, dann gelten wird

$$\frac{q'-q}{qdt} = -\left(\frac{du}{dx}\right) - \left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{dw}{dz}\right).$$

Nun wird aber, weil die Dichte q wie eine gegebene Funktion der vier Variablen x, y, z und t angesehen wird und nun freilich die Dichte des sich im Punkt Z befindenden Teilchens bezeichnet, wird die Dichte q' aus ihr berechnet werden, wenn es nach Ablauf der infinitesimalen Zeit dt zum Punkt z hinüberbewegt wird, und so müssen diesen vier Variablen x, y, z und t diese Inkremente udt, vdt, wdt und dt zugeteilt werden. Deshalb wird diese demselben von Z zu z translatierten Teichen entsprechende Dichte q' so ausgedrückt werden:

$$q' = q + udt\left(\frac{dq}{dx}\right) + vdt\left(\frac{dq}{dy}\right) + wdt\left(\frac{dq}{dz}\right) + dt\left(\frac{dq}{dt}\right),$$

woher wird

$$\frac{q'-q}{dt} = u\left(\frac{dq}{dx}\right) + v\left(\frac{dq}{dy}\right) + w\left(\frac{dq}{dz}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right);$$

wenn dieser Wert in der oberen Gleichung eingesetzt wird, wird die gesuchte Relation zwischen den Geschwindigkeiten und der Dichte in dieser Gleichung enthalten sein

$$q\left(\frac{du}{dx}\right) + q\left(\frac{dv}{dy}\right) + q\left(\frac{dw}{dz}\right) + u\left(\frac{dq}{dx}\right) + v\left(\frac{dq}{dy}\right) + w\left(\frac{dq}{dz}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0,$$

welche, weil $q\left(\frac{du}{dx}\right) + u\left(\frac{dq}{dx}\right) = \left(\frac{d\cdot qu}{dx}\right)$ ist, zu dieser zusammengefasst wird:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d\cdot qu}{dx}\right) + \left(\frac{d\cdot qv}{dy}\right) + \left(\frac{d\cdot qw}{dz}\right) = 0;$$

hier muss natürlich bei der Differentiation von qu allein x, bei der von qv allein y und bei der von qw allein z wie eine Variable behandelt werden.

KOROLLAR 1

§23[a] Wenn u, v und w also gegebene Funktionen der vier Variablen x, y, z und t sind, wird die gefundene Gleichung die Beschaffenheit der Funktion q aufzeigen; wie diese aber daraus bestimmt werden muss, tritt nicht klar zu tage.

KOROLLAR 2

§24 Wenn aber die Dichte q mit den zwei Geschwindigkeiten u und v gegeben ist, wird die Größe $\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{q \cdot qu}{dx}\right) + \left(\frac{d \cdot qv}{dy}\right)$, natürlich eine gewisse Funktion von x, y, z und t, bekannt sein, nach Setzen von welcher $= Q$ $\left(\frac{d \cdot qw}{dz}\right) + Q = 0$ sein wird. Es werde allein die Größe z als Variable angesehen. Und es wird durch Integrieren $qw + \int Qdz =$ Konst. hervorgehen, also

$$w = \frac{\text{Konst.} - \int Qdz}{q}.$$

BEMERKUNG 1

§25 Weil die Auflösung der gefundenen Gleichung:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d \cdot qu}{dx}\right) + \left(\frac{d \cdot qv}{dy}\right) + \left(\frac{d \cdot qw}{dz}\right) = 0$$

von größter Bedeutung ist, bemerke ich, dass ihr Genüge geleistet wird, wenn gilt

$$q = \Gamma : (x, y, z), \quad qu = \Delta : (t, y, z), \quad qv = \Sigma : (t, x, z), \quad qw = \Pi : (t, x, y),$$

dann verschwinden nämlich die einzelnen Glieder jeweils, welches eine sich sehr weit erstreckende Lösung ist, weil man vier beliebige Funktionen von drei Variablen hat. Mithilfe irgendeiner Funktion der vier Variablen x, y, z und t kann aber eine noch allgemeinere Lösung dargeboten werden; es sei nämlich T eine nach Belieben angenommene Funktion dieser Art und diese ergebe differenziert:

$$dT = Fdx + Gdy + Hdz + Idt;$$

weil wir ja nun wissen, dass aus der Natur der Differentiale heraus gilt:

$$\left(\frac{dF}{dt}\right) - \left(\frac{dI}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{dG}{dt}\right) - \left(\frac{dI}{dy}\right) = 0, \quad \left(\frac{dH}{dt}\right) - \left(\frac{dI}{dz}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) - \left(\frac{dG}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{dF}{dz}\right) - \left(\frac{dH}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{dG}{dz}\right) - \left(\frac{dH}{dy}\right) = 0,$$

werden durch Einführen der sechs Konstanten α, β, γ, δ, ε, ζ auch die folgenden Werte entdeckt Genüge zu leisten

$$\begin{aligned} q &= \quad \alpha F + \beta G + \gamma H + \Gamma \ : (x, y, z) \\ qu &= -\ \alpha I \ - \delta G \ - \varepsilon H \ + \Delta \ : (t, y, z) \\ qv &= -\ \beta I \ + \delta F \ \ - \zeta H \ + \Sigma \ : (t, x, z) \\ qw &= -\ \gamma I - \varepsilon F \ \ - \zeta G \ + \Pi : (t, x, y) \end{aligned}$$

und dennoch lässt sich nicht versichern, dass diese Lösung so allgemein ist, dass in ihr alle möglichen Fälle enthalten sind.

BEMERKUNG 2

§26 Wenn das Fluid so homogen ist, dass seine Dichte immer und überall dieselbe ist, wird die Relation zwischen den drei Geschwindigkeiten u, v und w so bestimmt, dass gelten muss:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0,$$

welcher sofort auch diese Werte genügen:

$$u = \Delta : (t, y, z), \quad v = \Sigma : (t, x, z), \quad w = \Pi : (t, x, y).$$

Des Weiteren wird auch nach Einführen einer Funktion T, dass gilt

$$dT = Fdx + Gdy + Hdz + Idt,$$

allgemeiner gelten

$$\begin{aligned} u &= -\ \delta G - \varepsilon H + \Delta \ : (t, y, z) \\ v &= +\ \delta F \ - \zeta H + \Sigma \ : (t, x, z) \\ w &= +\ \varepsilon F \ - \zeta G + \Pi : (t, x, y), \end{aligned}$$

indem natürlich in der oberen Lösung $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ gesetzt wird. Ich bemerke hier aber, dass es nicht nötig ist, dass die Größen δ, ε und ζ konstant sind, sondern auch Variablen genommen werden können, solange nur gilt

$$\left(\frac{d\delta}{dx}\right) - \left(\frac{d\zeta}{dz}\right) = 0, \quad \left(\frac{d\delta}{dy}\right) + \left(\frac{d\varepsilon}{dz}\right) = 0 \text{ und } \left(\frac{d\varepsilon}{dx}\right) + \left(\frac{d\delta}{dy}\right) = 0,$$

das heißt solange diese Formel $\zeta dx - \varphi dy + \delta dz$ integrierbar ist. Daher ist es möglich, außer der beliebigen Funktion T noch eine andere V einzuführen, dass gilt

$$dV = Kdx + Ldy + Mdz + Ndt,$$

und diese um vieles allgemeineren Werte werden Genüge leisten:

$$\begin{aligned} u &= HL - GM + \Delta : (t, y, z) \\ v &= FM - HK + \Sigma : (t, x, z) \\ w &= GK - FL + \Pi : (t, x, y). \end{aligned}$$

Bemerkung 3

§27 Auf dieselbe Weise ist es auch im Allgemeinen möglich, die Lösung für die variable Dichte q zu verallgemeinern, indem zwei Funktionen T und V der vier Variablen x, y, z und t eingeführt werden. Nachdem nämlich deren Differentiale wie folgt festgelegt worden sind:

$$dT = Fdx + Gdy + Hdz + Idt$$

und

$$dV = Kdx + Ldy + Mdz + Ndt,$$

werden der verlangen Bedingung die folgenden Werte Genüge leisten:

$$\begin{aligned} q &= (G + H)K + (H - F)L - (F + G)M + \Gamma : (x, y, z) \\ qu &= (H + I)L + (I - G)M - (G + H)N + \Delta : (t, y, z) \\ qv &= (I + F)M + (F - H)N - (H + I)K + \Sigma : (t, x, z) \\ qw &= (F + G)N + (G - I)K - (I + F)L + \Pi : (t, x, y). \end{aligned}$$

Dann können in der Tat auch zwei oder mehrere Formen von dieser Art miteinander verbunden werden, aber dabei ist zu verstehen, dass die Lösung dadurch nicht allgemeiner wird; weil, wenn eine andere für T genommene Funktion wie beispielsweise T' mit derselben V kombiniert wird und die daraus entspringenden Werte respektive zu diesen addiert werden, geht dieselbe Lösung hervor, wie wenn für T sogleich die Funktion $T + T'$ genommen worden wäre, was analog von der anderen V einzusehen ist, weil sie vertauscht werden können.

Kapitel II

Die Prinzipien der Bewegung von von irgendwelchen Kräften angegriffenen Fluiden

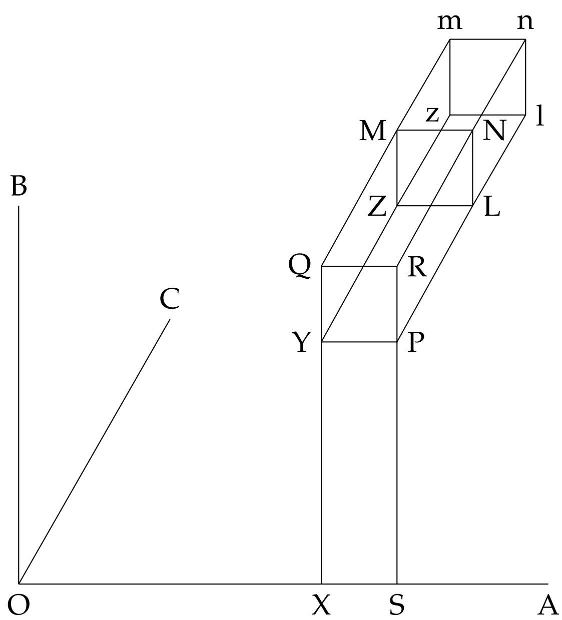
Problem 22

§28 *Wenn das Fluid von irgendwelchen Kräften beeinflusst wird und der Druck in den einzelnen Punkten als gegeben angesehen wird, die beschleunigenden Kräfte ausfindig zu machen, von welchen die einzelnen Elemente zur Bewegung gezwungen werden.*

Lösung

Nachdem die orthogonalen Koordinaten (Fig. 25) für den Punkt Z $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ gesetzt worden sind, werde dem sich nun in Z befindenden Element des Fluids die Form des rechtwinkligen Parallelepipeds $ZLMNzlmn$, welches in den Differentialen der Koordinaten, also $ZL = dx$, $ZM = dy$ und $Zz = dz$ enthalten ist und dessen Volumen daher $= dxdydz$ sein wird, zugeschrieben; und wenn q die Dichte in Z bezeichnet, wird seine Masse $= qdxdydz$. Nun wollen wir zuerst der Schwerkraft ähnliche auf den Punkt Z wirkende Kräfte betrachten; weil diese sich immer in solche in Richtungen der Achsen OA, OB, OC aufteilen lassen, seien diese beschleunigenden Kräfte in Richtung OA oder $Zl = P$, in Richtung OB oder $ZM = Q$, in Richtung OC oder $Zz = R$, von welchen dem Element des Fluids also

Fig. 25



Beschleunigungen in dieselben Richtungen aufgeprägt werden, wofür es freilich nicht von Nöten war, dem Element eine gewisse Form zuzuschreiben. Aber diese Form ist überaus geeignet, um die aus den Drücken entstandenen beschleunigenden Kräfte zu finden. Für diese Zeit sei als die dem Druck in Z entsprechende Höhe $= p$, welche als eine Funktion der vier Variablen x, y, z und t angesehen werden muss: Aus deren Gestalt werden die Drücke in den einzelnen Eckpunktes des Parallelepipeds bestimmt werden können, wie folgt

Im Punkt	ist der Druck	Im Punkt	ist der Druck
Z	p	z	$p + dz\left(\dfrac{dp}{dz}\right)$
L	$p + dx\left(\dfrac{dp}{dx}\right)$	l	$p + dx\left(\dfrac{dp}{dx}\right) + dz\left(\dfrac{dp}{dz}\right)$
M	$p + dy\left(\dfrac{dp}{dy}\right)$	m	$p + dy\left(\dfrac{dp}{dy}\right) + dz\left(\dfrac{dp}{dz}\right)$
N	$p + dy\left(\dfrac{dp}{dx}\right) + dy\left(\dfrac{dp}{dy}\right)$	n	$p + dx\left(\dfrac{dp}{dx}\right) + dy\left(\dfrac{dp}{dy}\right) + dz\left(\dfrac{dp}{dz}\right)$,

welche Drücke normal auf die einzelnen Seitenflächen wirken. Wir wollen die zwei gegenüberliegenden Seitenflächen $ZMzm$ und $LNln$ betrachten und es ist offenkundig, dass die Drücke, welchen die Seitenfläche $LNln$ in den einzelnen Punkten standhält, die Drücke der Seitenfläche $ZMzm$ in den gegenüberliegenden Punkten um denselben elementaren Druck $dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$ überragen, welcher Übertrag allein für die weitere Rechnung von Belang ist; daher, weil der Flächeninhalt dieser Seitenfläche $= dydz$ ist, wird der ganze Druck dem Gewicht des Volumens $= dxdydz\left(\frac{dp}{dx}\right)$ gleich, wenn die homogene Materie, deren Dichte $= 1$ sei, als kontinuierlich gefüllt betrachtet wird; und die Richtung dieser Kraft wird, weil sie zur Seitenfläche normal ist, der Achse AO parallel sein. Daher wird unserer Parallelepiped, dessen Masse $= qdxdydz$ ist, von der bewegenden Kraft $= dxdydz\left(\frac{dp}{dx}\right)$ in Richtung AO gezwungen werden, welche also durch die Masse dividiert die beschleunigende Kraft $= \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)$ gibt; in gleicher Weise wird die beschleunigende Kraft berechnet werden, mit welcher unser Parallelepiped in die Richtung BO gezwungen werden wird, sie ist $\frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right)$, und in die Richtung CO analog $= \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right)$. Weil diese Kräfte also denen entgegengerichtet sind, von welchen wir das Fluid angegriffen zu werden angenommen haben, wirken auf das in Z befindliche Element des Fluids die folgenden drei beschleunigenden Kräfte

$$\begin{aligned}\text{entlang der Richtung } OA &= P - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)\\ \text{entlang der Richtung } OB &= Q - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right)\\ \text{entlang der Richtung } OC &= R - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right).\end{aligned}$$

In diesen werden natürlich alle Kräfte, von den die Elemente des Fluids beeinflusst werden können, erfasst. Obgleich das Fluid nämlich von außen mithilfe eines Rührstabes gestört wird, daher wird keine andere Kraft auf die Elemente übertragen, außer die durch den Druck p, welchem wir hier schon Rechnung getragen haben.

KOROLLAR 1

§29 Welcher Kräftewirkung auch immer das Fluid also ausgesetzt war, so werden daher, wenn nur der Druck der in seinen einzelnen Elementen als bekannt angesehen wird, leicht die beschleunigenden Kräfte, welchen die einzelnen Elemente des Fluids standhalten, angegeben.

KOROLLAR 2

§30 Die den Druck anzeigende Höhe p geht aber so in die Rechnung ein, wie sie eine Funktion der drei Koordinaten x, y und z ist: Weil bei dieser Bestimmung der Kräfte die Zeit t ja als konstant angenommen wird.

KOROLLAR 3

§30[a] Bei den aus dem Druck entstehenden beschleunigenden Kräften wird auch die Dichte des Elementes des Fluids, q, ins Kalkül gezogen, welcher bei den Wirkungen P, Q, R keine Rechnung getragen wird, weil diese Kräfte entweder dichtere oder weniger dichte Elemente gleichermaßen beschleunigen.

Bemerkung 1

§31 Weil wir gesehen haben, dass die Seitenfläche $LNln$ in den einzelnen Punkten denselben Druck $dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$ erfährt, wird die mittlere Richtung all dieser Kräfte durch das Zentrum des trägen Parallelepipeds hindurchgehen, deshalb weil seine natürlich unendlich kleine Masse als homogen angesehen werden kann. Weil dies auch über die zwei übrigen Drücke zu verstehen ist und die der Schwerkraft P, Q, R ähnlichen Kräfte per se auf das Zentrum einer trägen Masse ausgeübt zu werden anzusehen sind, wird dem Parallelepiped von all diesen Kräften zusammengenommen keine Drehbewegung aufgezwungen werden; dennoch kann es indes, weil seine Form wegen der Flüssigkeit veränderlich ist, geschehen, dass seine Seitenlängen bei der Bewegung verändert werden, so wie auch sein Rauminhalt, wenn die Dichte nicht unveränderlich war, einer Veränderung unterworfen ist. Und dennoch wird eine Drehbewegung deshalb nicht vollkommen ausgeschlossen: Sofern nämlich nur alle Drücke $dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$, welche auf die Seitenfläche $LNln$ ausgeübt werden, gleich sind, so vernachlässigen wir hier alle differentialen Veränderungen zweiter Ordnung, von welchen natürlich schließlich eine gewisse Drehbewegung des Parallelepipeds verursacht werden kann. Dies lässt sich auch aus dem schließen, wo wir oben die Translation des pyramidalen Elementes $ZLMN$ (Fig. 23) bestimmt haben: Weil diese im unendlich kleinen Zeitabschnitt dt in die Lage $zlmn$ bewegt wird, hat so in der Größe wie in der Lage der Seiten eine gewisse Veränderung stattgefunden, welche in endlicher Zeit auch endlich werden kann. Aber welche Bewegung auch immer hier vollführt wird, ihre Natur wird durch die hier aufzustellenden Prinzipien bestimmt werden, und es ist nicht zu befürchten, dass hier irgendein Umstand ausgelassen wird, von welchem die Bewegung beeinflusst werden kann.

Bemerkung 2

§32 Es kann auch wundersam erscheinen, dass wir dem Element des Fluids hier die Form eines rechtwinkligen Parallelepipes zugeteilt haben; wäre nämlich eine andere Form angenommen worden, wäre die Rechnung um vieles schwieriger gewesen, und daher lässt sich bezweifeln, ob aus den Drücken dieselben Kräfte gefunden worden wären. Aber oben haben wir schon gezeigt, dass die Wirkung des Drucks nicht von der Form des Körpers, welcher ihn erfährt, abhängt, sondern allein von seinem Volumen, weil ein im Wasser eingetauchter Körper von seinem Druck immer im Verhältnis zum Volumen nach oben gezwungen wird, was für eine Form auch immer er dabei hat. Freilich kann eingeworfen werden, dass dieses Phänomen daher eintritt, weil so die Dichte des Wassers wie die Schwerkraft überall dieselbe ist, wohingegen dort, wo die Dichte zusammen mit den angreifenden Kräften, veränderlich war, natürlich die Form des versenkten Körpers ins Kalkül zu ziehen ist. Diese Zweifel verschwindet aber in dem Augenblick, in welchem das den Drücken standhaltende Volumen unendlich klein aufgefasst wird - wie wir es hier getan haben -, völlig, weil in einem unendlich kleinen Raum selbstredend jede Verschiedenheit so in der Dichte wie den wirkenden Kräften ausgeschlossen wird. Dieses Grundes wegen lässt sich nun mit Sicherheit bestätigen, dass sich, welche Form das in Z betrachtete Element auch immer hatte, daher kein Unterschied auf die beschleunigenden Kräfte, welche auf es wirken, niederschlägt und die, welche wir aus der Form des Parallelepipeds gefunden haben, sich richtig verhalten und sich zugleich gleichermaßen auf alle anderen Formen erstrecken: Ich habe aber diese Form deshalb verwendet, weil sie, um die Rechnung durchzuführen, am besten geeignet ist. Ja die Art der Form ging ja sogar aus den daraus abgeleiteten Schlussfolgerungen vollkommen heraus, ein handfestes Zeichen, dass sie in keinster Weise von der Form abhängen.

PROBLEM 23

§33 *Wenn ein Fluid irgendwelcher Natur von irgendwelchen Kräften angegriffen wird, die Prinzipien aufzustellen, aus denen es möglich ist, seine Bewegung zu bestimmen.*

LÖSUNG

Wir wollen (Fig. 22) den Zustand des Fluids betrachten, in welchem es sich zu irgendeiner Zeit $= t$ befand, und nachdem die drei einander orthogonalen festen Achsen OA, OB, OC festgelegt worden sind, wollen wir unsere Aufmerksamkeit auf irgendein Teilchen des Fluids in Z richten, dessen Lage von den drei Koordinaten $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ bestimmt und welches von den beschleunigenden Kräften P, Q, R in den jenen Achsen und Koordinaten parallelen Richtungen Zx, zy, Zz angegriffen wird. Um nun die Bewegung des Fluids ausfindig zu machen, werde zuerst die Dichte des sich nun in Z befindenden Teilchens $= q$ gesetzt, welche also als eine Funktion der vier Variablen x, y, z und t zu betrachten ist. Des Weiteren sei nun der der Höhe entsprechende Druck in $Z = p$, welcher ununterbrochen auf eine gleichmäßig schwere Materie, deren Dichte = 1 ist, zu beziehen ist; daher wird auch p eine Funktion der vier Variablen x, y, z und t sein. Als drittes werde das sich nun in Z befindende Teichen von irgendeiner Bewegung getragen, diese werde in dieselben drei Richtungen Zx, Zy, Zz aufgeteilt, und die Geschwindigkeit in die Richtung Zx sei $= x$, die in Zy sei $= v$, die in Zz sie $= w$, welche Geschwindigkeiten wir in einer Minutensekunde zu zurückzulegenden Strecken darbieten wollen, solange auch die Zeit t in Minutensekunden ausgedrückt wird. Nachdem all dies festgelegt worden ist, haben wir schon gesehen, dass zwischen diesen Geschwindigkeiten und der Dichte q diese Relation bestimmt wird, dass gilt:

$$\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d \cdot qu}{dx}\right) + \left(\frac{d \cdot qv}{dy}\right) + \left(\frac{d \cdot qw}{dz}\right) = 0.$$

Des Weiteren haben wir im vorhergehenden Problem herausgefunden, dass das Element des Fluids, nun in Z, von diesen beschleunigenden Kräften zur Bewegung gezwungen wird

$$\text{in Richt. } Zx = P - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right), \text{ in Richt. } Zy = Q\frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right), \text{ in Richt. } Zz = R - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right).$$

Aus der diesem Element zugeschriebenen Bewegung selbst haben wir aber in Problem § 20 seine Beschleunigungen in dieselben Richtungen so ausgedrückt gefunden:

$$\begin{aligned}
\text{in Richtung } Zx &= u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right) \\
\text{in Richtung } Zy &= u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right) \\
\text{in Richtung } Zz &= u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dt}\right).
\end{aligned}$$

Wenn wir also die Höhe, von welcher aus ein schwerer Körper in einer Minutensekunde herunterfällt, $= g$ setzen, ist, damit die Zeit und die Geschwindigkeiten in den vorgeschriebenen Einheiten ausgedrückt werden, jede Beschleunigung der mit $2g$ multiplizierten beschleunigenden Kraft gleichzusetzen, woher wir die folgenden Gleichungen erhalten:

$$2gP - \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right) = u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)$$

$$2gQ - \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right) = u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right) + \left(\frac{dv}{dt}\right)$$

$$2gR - \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right) = u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) + \left(\frac{dw}{dt}\right),$$

welche mit jener aus der Betrachtung der Dichte hervorgegangenen verbundenen die ganze Bestimmung der Bewegung beinhalten.

Korollar 1

§34 Die ganze Aufgabe geht also darauf zurück, dass für die Größen p, q, u, v, w Funktionen der vier Variablen x, y, z und t solcher Art gefunden werden, die diesen vier Gleichungen Genüge leisten; dass dies auf unendlich viele Weise passieren kann, ist zum einen per se klar und zum anderen erfordert es insbesondere die Natur der Sache.

Korollar 2

§35 Weil aber die Dichte q entweder konstant ist oder allein vom Druck p oder darüber hinaus von der Hitze abhängt, entspringt daraus eine neue den gefundenen Gleichung hinzuzufügende Bedingung, und durch diese wird die Frage etwas mehr eingeschränkt.

Korollar 3

§36 Weil die Dichte q also anderswoher gegeben ist, haben wir für die vier übrigen Unbekannten p, u, v, w vier Gleichungen erlangt, woher es offenbar ist, dass die hier angegebene Lösung vollständig ist und keine Bedingung ausgelassen worden ist, welche darüber hinaus zu berücksichtigen wäre.

Bemerkung

§37 In diesen gefundenen Gleichungen ist also die ganze Theorie der Bewegung von Fluiden in solcher Art und Weise enthalten, dass sie sich nicht nur auf alle Gattungen von Fluiden, sondern auch auf vollkommen alle Kräfte, von welchen Fluiden angegriffen werden können, erstreckt. Aber diese ganze Theorie führt zu einer völlig neuen und bis jetzt kaum berührten Gattung von Kalkül, weil per Integration Funktionen der vier von einander nicht abhängenden Variablen x, y, z und t gefundenen werden müssen. Wie unüblich und noch unergründet ein Kalkül von dieser Art ist, lässt sich daraus schließen, dass das ganze Integralkalkül, soweit wie es bis jetzt entwickelt worden ist, nur vom Finden von Funktionen einer einzigen Variable eingenommen wird und der Teil von diesem, der um Funktionen von zwei Variablen kreist, immer noch kaum ausgearbeitet worden ist, wozu das in größte Schwierigkeiten eingehüllte Problem über die schwingenden Saiten zu zählen ist. Weil hier also sogar Funktionen von vier Variablen ausfindig gemacht werden müssen, wird leicht erkannt, wie viele Fortschritte und neue Techniken in diesem Kalkül für diese Aufgabe noch immer verlangt werden. Es ist sich also besonders darum zu bemühen, dass die gefundenen Gleichungen entweder vereinfacht oder in ihrer Anzahl reduziert werden, damit darauf folgend deren Entwicklung leichter in Angriff genommen werden kann. Und die drei letzten Gleichungen sind freilich so beschaffen, dass sie zu einer vermengt werden können, die aber die Tragweite der einzelnen in sich umfasst, wie wir im folgenden Problem erläutern werden.

Problem 24

§38 *Wenn außer den angreifenden Kräften P, Q, R auch die zwei Geschwindigkeiten u, v und w zusammen mit der Dichte q als gegeben angesehen werden, den Druck p durch eine einzige Gleichung zu bestimmen.*

Lösung

Die erste der drei Gleichungen, welche wir im vorhergehenden Problem gefunden haben, bietet den Wert von $\left(\frac{dp}{dx}\right)$ dar, die zweite den von $\left(\frac{dp}{dy}\right)$ und die dritte den von $\left(\frac{dp}{dz}\right)$. Weil p also eine Funktion der vier Variablen x, y, z und t ist, wird, wenn wir die Zeit t für konstant halten, natürlich gelten:

$$dp = dx\left(\frac{dp}{dx}\right) + dy\left(\frac{dp}{dy}\right) + dz\left(\frac{dp}{dz}\right),$$

woher wir die ganze Sache auf das totale Differential von p zurückführen können werden. Für dieses Ziel wollen wir der Kürze wegen festlegen

$$u\left(\frac{du}{dx}\right)+v\left(\frac{du}{dy}\right)+w\left(\frac{du}{dz}\right)+\left(\frac{du}{dt}\right)=U$$
$$u\left(\frac{dv}{dx}\right)+v\left(\frac{dv}{dy}\right)+w\left(\frac{dv}{dz}\right)+\left(\frac{dv}{dt}\right)=V$$
$$u\left(\frac{dw}{dx}\right)+v\left(\frac{dw}{dy}\right)+w\left(\frac{dw}{dz}\right)+\left(\frac{dw}{dt}\right)=W,$$

dass die drei gefundenen Gleichungen zu diesen werden:

$$\frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right)=2gP-U,\quad \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right)=2gQ-V,\quad \frac{2g}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right)=2gR-W;$$

wenn deren erste mit dx, die zweite mit dy und die dritte mit dz multipliziert wird, werden wir wegen

$$dx\left(\frac{dp}{dx}\right)+dy\left(\frac{dp}{dy}\right)+dz\left(\frac{dp}{dz}\right)=dp,$$

wobei dp das Differential des Drucks p für konstante gehaltene Zeit dt bezeichnet, durch Addieren der Gleichungen diese Gleichung erhalten:

$$\frac{2gdp}{q}=2q(Pdx+Qdy+Rdz)-Udx-Vdy-Wdz,$$

aus welcher nun durch Integration der Druck p ausfindig gemacht werden muss. Es ist aber zu bemerken, dass sich diese einzelne Gleichung genauso weit erstreckt wie die drei vorgehenden zusammengenommen und die einzelnen so in sich umfasst, dass sie ohne Beschränkung der Allgemeinheit an die Stelle jener drei Gleichungen gesetzt werden kann. Wenn nämlich im Allgemeinen galt

$$dp=Ldx+Mdy+Ndz,$$

umfasst die einzelne Gleichung diese drei in sich

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)=L,\quad \left(\frac{dp}{dy}\right)=M \quad \text{und} \quad \left(\frac{dp}{dz}\right)=N,$$

und wird nicht mehr durch die drei Gleichungen bestimmt als durch jene eine allein.

Korollar 1

§39 Nun ist die ganze Theorie der Bewegung von Fluiden in diesen zwei Gleichungen enthalten:

$$\text{I.} \quad \left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{d \cdot qu}{dx}\right) + \left(\frac{d \cdot qv}{dy}\right) + \left(\frac{d \cdot qw}{dz}\right)$$

$$\text{II.} \quad 2g(Pdx + Qdy + Rdz) - Udx - Vdy - Wdz,$$

denen darüber hinaus die Relation zwischen der Dichte q und dem Druck p, welche die Natur des Fluids erfordert, hinzugefügt werden muss.

Korollar 2

§40 In der letzten dieser Gleichungen wird die Zeit t konstant angenommen, woher nach ausgeführter Integration in den Wert von p anstelle einer Konstante irgendeine beliebige Funktion der Zeit t eingehen wird: Genauso wie es die Natur der Sache erfordert, weil die inneren Drücke p durch äußere Kräfte nach Belieben zu jedem Zeitpunkt verändert werden können.

Korollar 3

§41 Wenn in der letzten Gleichung die Größen U, V, W als gegebene Funktionen von x, y und z betrachtet werden, müssen sie so beschaffen sein, dass die Gleichung eine Integration zulässt; wenn dies nämlich nicht passiert, ist ein Bewegung von dieser Art für völlig unmöglich zu halten.

Bemerkung 1

§42 Wir haben schon des Öfteren bemerkt, dass die beschleunigenden Kräfte P, Q, R, die freilich auf der Erde gefunden werden, immer so beschaffen sind, dass die Differentialformel $Pdx + Qdy + Rdz$ eine Integration zulässt, deren Integral das ist, was sich Wirkungsgröße nennen lässt. Wenn diese Wirkung also mit dem Buchstaben S angezeigt wird, wird die zweite Gleichung diese Form annehmen:

$$\frac{2gdp}{q} = 2gdS - Udx - Vdy - Wdz.$$

Wenn also auch die Form $Udx + Vdy + Wdz$ eine Integration zulässt und ihr Integral T genannt wird, dass gilt

$$\frac{2gdp}{q} = 2gdS - dT,$$

wo nun die Integrabilitätsbedingungen hinreichend klar sind, natürlich wenn die Größe entweder konstant oder allein vom Druck p abhängig ist, ist das Integral

$$2g\int\frac{dp}{q} = 2gS - T - \Gamma : t;$$

wenn dann aber q eine irgendwie von p und $2gS - T$ abhängende Größe war, ist die Gleichung gleichermaßen für möglich zu halten, natürlich nur die zwei Variablen p und $2gS - T$ involvierend; daher werden aber so p wie q jeweils gewissen Funktionen der Größe $2gS - T$ gleich werden, in welche t freilich auf irgendeine Weise als Konstante eingehen kann. Und aus diesem Fall wird leicht eingesehen, dass dafür, dass unsere zweite Gleichung eine Integration zulässt, absolut verlangt wird, dass sie sich mithilfe irgendeiner Substitution in eine nur zwei Variablen enthaltende Form transformieren lässt. Es sind nämlich irgendwelche Differentialgleichungen zwischen drei oder mehreren Variablen möglich, wofür, in welchen Fällen dies passiert, in der Analysis entsprechende Kriterien angegeben zu werden pflegen; diese Kriterien gehen aber immer darauf zurück, dass die Gleichungen mithilfe einer bestimmten Substitution auf nur zwei Variablen zurückgeführt werden können; so wie wir es im zuvor entwickelten Fall zu geschehen sehen.

Bemerkung 2

§43 Nach dieser Annahme, nach welcher wir die Formel $Udx + Vdy + Wdz$ als integrierbar angenommen haben, haben wir unsere allgemeine Formel sehr stark eingeschränkt. Die dreifache Bestimmung scheint freilich sogar durch diese Bedingung berücksichtigt zu werden, weil durch sie verlangt wird, dass gilt

$$\left(\frac{dU}{dy}\right) = \left(\frac{dV}{dx}\right), \quad \left(\frac{dU}{dz}\right) = \left(\frac{dW}{dx}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{dV}{dz}\right) = \left(\frac{dW}{dy}\right),$$

aber es ist zu bemerken, dass, solange zwei dieser drei Formeln Genüge geleistet worden ist, damit auch zugleich der dritten genügt wird. Wir wollen nämlich festlegen, dass die Relation zwischen U, V und W so eingeschränkt ist, dass die zwei ersten Formeln erfüllt sind, und aus diesen wird dann mit einer Differentiation gefunden werden:

$$\left(\frac{ddU}{dydz}\right) = \left(\frac{ddV}{dxdz}\right) = \left(\frac{ddW}{dxdy}\right).$$

Weil also daher $\left(\frac{ddV}{dxdz}\right) = \left(\frac{ddW}{dxdy}\right)$ ist, umfasst diese Gleichung selbstredend jene dritte Formel $\left(\frac{dV}{dx}\right) = \left(\frac{dW}{dy}\right)$ in sich. Daher haben wir unsere allgemeine Gleichung durch zwei Bestimmungen eingeschränkt. Dann ist aber auch zu erwägen, dass die Größen U, V und W aufgrund der ersten allgemeinen Gleichung zusätzlich von der Dichte q abhängen, sodass es uns nicht weiter frei steht, Bedingungen solcher Art anzusetzen, weil die Größe q ja auch einzeln in die andere Gleichung eingeht. Dennoch ist indes dies gewiss, welche Werte auch immer sich für die Größen p, q, u, v, w erdenken ließen, welchen jede der beiden allgemeinen Gleichungen Genüge leisten möge, dass von ihnen eine bestimmte mögliche Bewegung dargeboten wird, solange nur ein solches Fluid existiert, dessen Dichte in Bezug auf den Druck jenem Ansatz entspricht. Aber die erste allgemeine Gleichung, in welche weder die Kräfte P, Q, R noch der Druck eingehen, lässt sich ohne Berücksichtigung der anderen behandeln: Es gelingt sogar, ihre vollständige Integration zu finden, welche ich im folgenden Problem erläutern werde.

Problem 25

§44 *Das vollständige Integral der ersten für die Bewegung von Fluiden gefundenen Gleichung:*

$$\left(\frac{d \cdot qu}{dx}\right) + \left(\frac{d \cdot qv}{dy}\right) + \left(\frac{d \cdot qw}{dz}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0$$

ausfindig zu machen.

Lösung

Die Frage geht also darauf zurück, dass eine Gleichung von dieser in allgemeinster Weise aufgelöst wird

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dQ}{dy}\right) + \left(\frac{dR}{dz}\right) + \left(\frac{dS}{dt}\right) = 0$$

oder dass für die vier Größen P, Q, R, S im Allgemeinen Funktionen der vier Variablen x, y, z und t solcher Art angegeben werden, die nicht nur dieser Gleichung genüge leisten, sondern auch ganz und gar alle Lösungen in sich umfassen. Um dieses Ziel sicher und gewiss zu erreichen, wollen wir uns schrittweise von den einfacheren Fällen aus beginnend zu dem vorgelegten vorarbeiten. Und zuerst ist, wenn nur eine einzige Variable, wie x, vorhanden ist und die Gleichung aus dem einen einzigen Term $\left(\frac{dP}{dx}\right) = 0$, das Integral natürlich $P =$Konst. Nun werden die zwei Variablen x und y zugelassen, und es sei diese Gleichung zu integrieren

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dQ}{dy}\right) = 0.$$

Dies wird im Allgemeinen geleistet werden, indem nach Belieben irgendeine Funktion der zwei Variablen x und y genommen wird, welche O sei und nach einer Differentiation $dO = Kdx + Ldy$ werde: Und es ist offenbar, dass jene Gleichung mit diesen Funktionen vollständig integriert wird:

$$P = L + \Gamma : y \quad \text{und} \quad Q = -K + \Delta : x.$$

Nun werden drei Variablen x, y, z festgelegt, dass diese Gleichung integriert werden muss:

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dQ}{dy}\right) + \left(\frac{dR}{dz}\right) = 0 :$$

und oben (in Paragraph 25) haben wir gesehen, dass, um dies zu leisten, nach Belieben zwei Funktionen der drei Variablen x, y und z angenommen werden können; wenn diese O und o waren und aus deren Differentiation hervorgeht

$$dO = Kdx + Ldy + Mdz \quad \text{und} \quad do = kdx + ldy + mdz,$$

wird die allgemeine Lösung diese sein

$$P = Lm - Ml + \Gamma : (y, z),$$
$$Q = Mk - Km + \Delta : (x, z)$$

und

$$R = Kl \quad - Lk \quad + \Sigma : (x, y).$$

Weil diese Lösung außer den zwei nach Belieben angenommenen Funktionen O und o drüber hinaus drei beliebige Funktionen von zwei Variablen umfasst, ist sie natürlich für vollständig zu halten. Daraus wird also eine Methode die vorgelegte Gleichung selbst aufzulösen gefolgert, in welcher vier Variablen enthalten sind:

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dQ}{dy}\right) + \left(\frac{dR}{dz}\right) + \left(\frac{dS}{dt}\right) = 0.$$

Hier werden natürlich drei Funktionen von vier Variablen nach Belieben angenommen, O, o, ω, deren Differentiale diese seien:

$$\begin{aligned}
dO &= Kdx + Ldy + Mdz + Ndt \\
do &= odx \ + ldy \ + mdz \ + ndt \\
d\omega &= \varkappa dx + \lambda dy + \mu dz \ + \nu dt,
\end{aligned}$$

und die gesuchten Funktionen P, Q, R, S werden daraus so bestimmt, dass gilt

$$\begin{aligned}
P &= +Lm\nu \ + Mn\lambda + Nl\mu \ - Ln\mu \ - Ml\nu \ - Nm\lambda + \Gamma \ : (y, z, t) \\
Q &= -Mn\varkappa - Nk\mu \ - Km\nu + Mk\nu \ + Nm\kappa + Kn\mu \ + \Delta \ : (x, z, t) \\
R &= +Nk\lambda \ + Kl\nu \ \ + Ln\varkappa - Nl\varkappa - Kn\lambda \ - Lk\nu \ \ + \Sigma \ : (x, y, t) \\
S &= -Kl\mu \ \ - Lm\varkappa - Mk\lambda + Km\lambda + Lk\mu \ \ + Ml\varkappa + \Pi : (x, y, z);
\end{aligned}$$

weil diese Werte Genüge leisten und zusätzlich nach dem Schema drei beliebige Funktionen von vier Variablen zusammen mit vier ebenso nach Belieben anzunehmenden Funktionen von drei Variablen involvieren, sind diese zweifelsohne anzusehen die vollständige Integration darzustellen.

KOROLLAR 1

§45 Um den Geist mit der Menge an Buchstaben nicht zu überlasten, wollen wir anstelle der Funktionen O, o, ω die Buchstaben F, G, H schreiben, und aus deren Differentialformeln wird sich die Lösung unseres Problems so verhalten:

$$\begin{aligned}
qu = {} & \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right)\\
& -\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right)-\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right)-\left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right)+\Gamma : (y,z,t)\\
qv = {} & -\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right)-\left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right)-\left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right)\\
& +\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right)+\left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right)+\Delta : (x,z,t)\\
qw = {} & \left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right)+\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right)\\
& -\left(\frac{dF}{dt}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right)-\left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dt}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right)-\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right)+\Sigma : (x,y,t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q = {} & -\left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right)-\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right)-\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right)\\
& +\left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right)\left(\frac{dH}{dz}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right)\left(\frac{dH}{dx}\right)+\Pi : (x,y.z)
\end{aligned}$$

KOROLLAR 2

§46 Weil hier die Menge der Terme dem nicht im Wege steht, ist es leicht, das Gesetz festzustellen, nach welchem die Teile für die einzelnen Werte kombiniert sind, im ersten Ausdruckt tritt nämlich das Element dx nie auf, im zweiten fehlt dy, im dritten dz und im vierten dt. Dann entspringt aber, wenn im ersten anstelle von dy jeweils dx geschrieben wird und die Vorzeichen verändert werden, der zweite, wenn aber im ersten anstelle von dz dx

geschrieben wird, entspringt der dritte: Und so ist es möglich, aus einem jedem gegebenen die übrigen zu finden.

KOROLLAR 3

§47 Dann sind aber in jedem beliebigen Ausdruck die drei Glieder, welche keinen gemeinsamen Faktor haben, auch mit demselben Vorzeichen behaftet; welche aber einen gemeinsamen Faktor haben, sind mit verschiedenen Vorzeichen behaftet. Schließlich sind in den verschiedenen Ausdrücken die Glieder, die keinen gemeinsamen Faktor haben, mit verschiedenen Vorzeichen, welche aber einen einzigen gemeinsamen Faktor haben, mit demselben Vorzeichen, und die zwei gemeinsame Faktoren haben, wiederum mit verschiedenen Vorzeichen behaftet.

BEMERKUNG 1

§48 Einem jedem Glied eines gewissen Ausdrucks entspricht in den übrigen Ausdruck nur ein einziges, und zwar das, welches mit ihm zwei gemeinsame Faktoren hat; dies verdient es besonders angemerkt zu werden, weil ja der ganze Beweis dieser Lösung darauf gestützt ist, und es wird auf die folgende Weise bewiesen. Es werde das Glied $\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right)$ aus der Form qu genommen, für welches in den übrigen das Glied gesucht werden muss, was mit ihm diese zwei Faktoren $\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)$ gemeinsam hat. Es ist aber ersichtlich, dass ein solches Glied weder in der Form qv (weil hier dy ausgeschlossen ist) noch in der Form qw (weil hier dz ausgeschlossen ist) auftauchen kann: In der Form q muss es aber gewiss aufgefunden werden, und das mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen, also natürlich als $-\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right)$, was zugleich über die ganzen anderen Glieder festzuhalten ist. Nachdem dies nun dargetan worden ist, verhält sich unsere Lösung so: Es werden nur zwei Glieder von dieser Art betrachtet, die gegebene gemeinsame Faktoren haben und die für die gemeinsamen Faktoren $\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)$ in diesen Formen aufgefunden werden:

$$qu = +\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right) + \text{etc.}, \quad q = -\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{dH}{dt}\right) + \text{etc.},$$

woraus wir für die vorgelegte zu integrierende Gleichung:

$$\left(\frac{d\cdot qu}{dx}\right)+\left(\frac{d\cdot qv}{dy}\right)+\left(\frac{d\cdot qw}{dz}\right)+\left(\frac{dq}{dt}\right)=0$$

durch Differenzieren der einzelnen verschiedenen Faktoren finden:

$$\left(\frac{d\cdot qu}{dx}\right)=+\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{ddH}{dtdx}\right)\quad\text{etc.}$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)\quad=-\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{ddH}{dtdx}\right)\quad\text{etc.,}$$

wo sich diese zwei Glieder gegenseitig aufheben. Daraus wird eingesehen, wenn für qu, qv, qw und q die ganzen gefundenen Ausdrücke eingesetzt werden und die einzelnen Glieder entsprechend differenziert werden, auf welche Weise die einzelnen Glieder in jeweils drei Teile aufteilt werden, dass sich all diese Teile gegenseitig aufheben müssen. Denn während die einzelnen Glieder differenziert werden, resultieren daher für die drei Faktoren in den Differentialen drei neue Glieder, in denen nur je ein einziger Faktor differenziert wird, wohingegen die zwei übrigen unberührt bleiben, woher dasselbe, was hier über die Aufhebung des differenzierten Gliedes $\left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right)\left(\frac{ddH}{dtdx}\right)$ gezeigt worden ist, zu verstehen ist, genauso für alle anderen zu gelten.

Bemerkung 2

§49 Aus der Lösung des Problems, in welcher wir schrittweise zur vorgelegten Gleichung fortgeschritten sind, werden wir, den Fall, in welchem die Dichte des Fluids, also q, konstant ist und sich die Gleichung so verhält

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0,$$

auflösen können, was umso mehr zu bemerken ist, weil es nicht möglich ist, deren Lösung aus der allgemeinen Lösung, die wir angegeben haben, abzuleiten. Obwohl hier nur die drei Variablen x, y und z betrachtet werden, hindert dennoch nichts daran, dass wir in der dort gegebenen Lösung auch die vierte t einführen, indem wir sie aber quasi als konstant betrachten. Nachdem also nach Belieben zwei Funktionen F, G der vier Variablen x, y, z und t

genommen worden sind, werden die drei Geschwindigkeiten u, v und w so bestimmt werden, dass gilt

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right) - \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right) + \Gamma : (y, z, t) \\ v &= \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right) - \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right) + \Delta : (x, z, t) \\ w &= \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right) - \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right) + \Sigma : (x, y, t), \end{aligned}$$

wo die ganze Bedeutung wiederum darin gelegen ist, dass jedem Glied einer Form in den übrigen ein anderes entspricht, was mit ihm einen gegebenen Faktor gemeinsam hat und mit dem entgegengesetzten Vorzeichen behaftet ist. Hier verdient aber der ganze Fall, in welchem die Dichte des Fluids eine konstante Größe ist, gesondert ausführlicher entwickelt zu werden, welcher Aufgabe das folgende Kapitel gewidmet ist. Im Übrigen wird für die Analysis förderlich sein hier bemerkt zu haben, dass mit dieser Methode auch ähnliche Gleichungen, wo mehr als vier Variablen auftreten, allgemein aufgelöst werden können; aber die Anzahl der Glieder wächst so stark an, dass es allzu langwierig wäre, sogar nur den Fall von fünf Variablen zu entwickeln.

Kapitel III

Anwendung dieser Prinzipien auf Fluide mit überall gleicher Dichte

Problem 26

§50 *Wenn die Dichte des Fluids überall und immer dieselbe ist und es von irgendwelchen Kräften angegriffen wird, seine Bewegung durch analytische Formeln zu bestimmen.*

Lösung

Was im vorgehenden Kapitel über die Bewegung von Fluiden irgendwelcher Beschaffenheit angegeben worden ist, wird nun auf diesen Fall angewendet, in dem die Dichte, die wie auch immer variabel festgelegt worden war, nun konstant gesetzt wird, welche Dichte nun $= b$ sei, sodass wir $q = b$ haben. Daher wird die erste Gleichung sofort zu dieser Form zusammengezogen

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0,$$

welche wir, indem irgendwelche zwei Funktionen F und G der vier Variablen x, y, z und t genommen werden, gesehen haben, so vollständig integriert zu werden, dass gilt

$$\begin{aligned}
u &= \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right) - \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right) + \Gamma : (y, z, t) \\
v &= \left(\frac{dF}{dz}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right) - \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dz}\right) + \Delta : (x, z, t) \\
w &= \left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dG}{dy}\right) - \left(\frac{dF}{dy}\right)\left(\frac{dG}{dx}\right) + \Sigma : (x, y, t),
\end{aligned}$$

wo Γ, Δ, Σ Funktionen solcher Art bezeichnen, dass gilt

$$\left(\frac{d\Gamma}{dx}\right) = 0, \quad \left(\frac{d\Delta}{dy}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\Sigma}{dz}\right) = 0.$$

Für die andere Gleichung wollen wir zuerst der Kürze wegen festlegen

$$u\left(\frac{du}{dx}\right)+v\left(\frac{du}{dy}\right)+w\left(\frac{du}{dz}\right)+u\left(\frac{du}{dt}\right)=U$$

$$u\left(\frac{dv}{dx}\right)+v\left(\frac{dv}{dy}\right)+w\left(\frac{dv}{dz}\right)+u\left(\frac{dv}{dt}\right)=V$$

$$u\left(\frac{dw}{dx}\right)+v\left(\frac{dw}{dy}\right)+w\left(\frac{dw}{dz}\right)+u\left(\frac{dw}{dt}\right)=W$$

und diese Gleichung wird diese Form haben:

$$\frac{2gdp}{b}=2g(Pdx+Qdy+Rdz)-Udx-Vdy-Wdz;$$

weil dort die Formel $Pdx+Qdy+Rdz$ immer per se integrierbar ist, wird, nachdem ihr Integral $=S$ gesetzt worden ist, sein

$$\frac{2gdp}{b}=2gdS-Udx-Vdy-Wdz,$$

wobei angemerkt sei, dass in dieser Differentialgleichung t konstant angenommen worden ist. Weil also aus der ersten Gleichung die Geschwindigkeiten u, v, w schon durch die vier Variablen x, y, z und t ausgedrückt worden sind, wird aus dieser auch der Druck p durch dieselben vier Variablen dargeboten, solange diese Gleichung eine mögliche war, was nur geschehen kann, wenn die Formel $Udx+Vdy+Wdz$ per se eine Integration zulässt, durch welche Bedingung die Integration der ersten Gleichung nicht unwesentlich eingeschränkt wird. Nachdem dieses Integral $=T$ gesetzt worden ist, wird also gelten

$$\frac{2gp}{b}=2gS-T+f:t,$$

indem anstelle der Konstante irgendeine Funktion von t hinzuaddiert wird.

Korollar 1

§51 Aus der vollkommen allgemeinen Gleichung der ersten Gleichung sind also nur die Fälle zuzulassen, in denen zugleich die Formel $Udx+Vdy+Wdz$ integrierbar gemacht wird: Weil diese Bedingung zwei Bestimmungen erfordert, verlangen jene allgemeinen Funktionen F, G und Γ, Δ, Σ zwei Einschränkungen.

KOROLLAR 2

§52 Für die drei Geschwindigkeiten u, v, w müssen also Funktion der Variablen x, y, z und t solcher Art ausfindig gemacht werden, dass zuerst gilt

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0,$$

dann ist aber darüber hinaus diesen Formeln Genüge zu leisten

$$\left(\frac{dU}{dy}\right)=\left(\frac{dV}{dx}\right),\quad \left(\frac{dU}{dz}\right)=\left(\frac{dW}{dx}\right)\quad \text{und}\quad \left(\frac{dV}{dz}\right)=\left(\frac{dW}{dy}\right),$$

von welchen drei letzten je zwei freilich die dritte in sich beinhalten, sodass es insgesamt drei Bedingungen gibt.

BEMERKUNG

§53 Die erste Integration, auch wenn sie im Allgemeinen gelingt, verschafft dennoch kaum etwas an Nutzen um das vorgelegte Problem zu lösen, weil ja die Bestimmung der Funktionen, welche wir für die drei Geschwindigkeiten u, v und w gefunden haben, dass die Formel $Udx + Vdy + Wdz$ integrierbar wird, nicht einmal im Geringsten erleichtert wird. Und es wäre gewiss verwegen, bei einer so schwierigen Untersuchung auf eine leichte Auflösung zu hoffen, weil sogar die Bestimmung der Bewegung von Festkörpern größten Schwierigkeiten unterworfen ist. Obgleich nämlich für diese Körper die Entwicklung des Falles, in welchem es keine angreifenden Kräfte gibt, schließlich zu einem glücklichen Ende gebracht worden ist, besteht dennoch überhaupt kein Zweifel, dass die Bewegung von Fluiden um vieles schwieriger zu behandeln ist. Daher wird es gefällig sein, die Untersuchungen dorthin zu richten, dass wir zumindest nach mehreren Spezialfällen suchen, in denen es möglich ist, die Bewegung zu bestimmen. Und zuerst bietet sich freilich die Parallelbewegung an, in welcher sich das Fluid genauso wie eine Festkörper bewegt, welche genauer erwägt und aus unseren Formeln abgeleitet zu haben deshalb überaus förderlich sein wird: Die ganze Aufgabe wird aber nicht unwesentlich illustriert werden, wenn wir zuvor den Fall, in welchem die drei Geschwindigkeiten gänzlich verschwinden, einer Untersuchung unterwerfen; auch wenn so nämlich jede Bewegung beseitigt wird und die Sache zu einem Gleichgewicht geführt wird, werden hier dennoch, weil ja der Druck variabel sein kann, einige zu bemerkende Dinge auftauchen, welche im Folgenden nicht unnützlich sein werden.

PROBLEM 27

§54 *Wenn die drei Geschwindigkeiten u, v, w eines Elementes des Fluids verschwinden, aber irgendwelche mit den Buchstaben P, Q, R angezeigten Kräfte das Fluid angreifen, weil das Fluid ja dann angenommen wird in Ruhe zu bleiben, den Druck des Fluids so in den einzelnen Punkten wie zur Zeit t zu bestimmen.*

LÖSUNG

Es ist sofort klar, dass diese Annahme $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ der ersten Gleichung

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{dw}{dz}\right) = 0$$

Genüge leistet. Dann nimmt die andere Gleichung aber wegen $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ diese Form an:

$$\frac{dp}{b} = Pdx + Qdy + Rdz,$$

aus welcher es offenbar ist, dass die Annahme der Ruhe nur Geltung haben kann, wenn die Kräfte P, Q, R so beschaffen sind, dass die Formel $Pdx + Qdy + Rdz$ eine Integration zulässt. Ihr Integral sei also $= S$, dass $dp = bdS$ ist, und weil die Zeit t konstant angenommen worden ist, wird das vollständige Integral $p = bS + \Gamma : t$ sein, indem natürlich anstelle der Konstante irgendeine Funktion der Zeit t hinzugefügt wird. Für denselben Moment wird der Druck durch die ganze Masse des Fluids hindurch einzig von der Größe S abhängen, sodass der Druck in den Gleichgewichtsschichten, in welchen S überall denselben Wert hat, gleich ist, so wie im ersten Abschnitt über das Gleichgewicht gezeigt worden ist. Nun tritt es aber darüber hinaus klar zutage, was dort nicht angemerkt worden ist, dass es geschehen kann, dass der Druck in demselben Punkt Z sich mit der Zeit auf irgendeine Weise ändert. Das stimmt aber auch wunderbar mit der Natur der Frage überein; das Fluid werde nämlich in einem Gefäß eingeschlossen aufgefasst, in welchem es mithilfe eines Kolbens von irgendeiner Kraft beunruhigt wird, und so wird, wenn das Fluid keine Kompression zulässt, es sich ohne Zweifel in einem Gleichgewicht befinden. Aber dieser Gleichgewichtszustand wird nicht gestört werden, auch wenn die den Kolben treibende Kraft ununterbrochen entweder nach oder auch ohne ein gewisses Gesetz verändert wird; aber daher wird auch der Druck im Fluid ununterbrochen verändert werden. Daher, weil unsere Lösung alle möglichen Fälle der Ruhe in sich umfassen muss, ist auch der Grund klar, warum in den für p gefundenen Ausdruck irgendeine Funktion der Zeit eingegangen ist.

KOROLLAR 1

§55 Diese Funktion der Zeit t muss also in jedem Fall aus der Variation der Kräfte, von welchen der Kolben verdrängt wird, bestimmt werden: Wenn diese beliebig war und von keinem Gesetz eingeschränkt ist, ist die Funktion auch zum Geschlecht derer, welche ich diskontinuierlich genannt habe, zu rechnen. Daher zeigt sich die Notwendigkeit von Funktionen dieser Art in der Analysis noch um vieles deutlicher.

KOROLLAR 2

§56 Wenn also zu einer gegebenen Zeit der Druck in irgendeinem Punkt bekannt war, wird für denselben Moment der Druck in allen anderen Punkten angegeben werden können, welcher natürlich allein von der Größe S abhängt. Von diesen Drücken werden aber weder die vorgehenden noch die folgenden in irgendeiner Weise abhängen.

BEMERKUNG

§57 Während das Fluid hier in einem Gefäß eingeschlossen und mithilfe eines Kolbens von irgendeiner Kraft beeinflusst zu werden aufgefasst wird, wird per se eingesehen, dass, wenn das Gefäß nicht an seinem Standort befestigt ist, es in jedem Moment solchen Kräften standhalten muss, welche ausreichen, um es in Ruhe zu halten; andernfalls würde der Fall nicht mit der gemachten Annahme übereinstimmen. Aber diese äußeren Kräfte gehen genauso wenig wie die, mit welcher der Kolben verdrängt wird, in unsere Differentialformeln ein, weil sie ja die Bewegung der Teilchen des Fluids nicht unmittelbar betreffen, weil die einzelnen Teilchen nur von den natürlichen Kräften P, Q, R und dem Druck angegriffen werden: Erst nach ausgeführter Integration müssen aber jene beliebigen durch die Integrationen in die Rechnung eingeführten Funktionen an jene äußeren Kräfte und andere Umstände angepasst werden. Die äußeren Kräfte sind aber von zweierlei Art, von denen die einen das Gefäß als Festkörper angreifen und nicht das Fluid selbst betreffen, die anderen dahingegen gleichsam auf den Kolben ausgeübt zugleich auf das Fluid Druck ausüben und das Gefäß selbst genauso wie jene beunruhigen. Außerdem wird auch von den Kräften P, Q, R auf das Gefäß dieselbe Kraft ausgeübt wie wenn es mit dem Fluid einen Festkörper festlegen würde er und deren Wirkung ausgesetzt wäre; daher lässt sich leicht einsehen, wie große Kräfte von Nöten sind, um das Gefäß in Ruhe zu halten, damit mit dem Gefäß nicht auch das Fluid über den Ruhezustand hinaus gestört wird.

PROBLEM 28

Wenn die drei Geschwindigkeiten u, v, w eines Punktes Z des Fluids konstant waren, sodass die einzelnen Elemente in einer gleichmäßigen Bewegung in dieselbe Richtung getragen werden, während sie von irgendwelchen beschleunigenden Kräften angegriffen werden, die Drücke überall und für jede Zeit ausfindig zu machen.

LÖSUNG

Die ganze Masse des Fluids wird also genauso bewegt wie ein Festkörper; wenn es also in einem Gefäß eingeschlossen wird, wird dieses Gefäß mit dem Fluid gleichmäßig in eine Richtung bewegt werden, eine Bewegung von welcher Art es natürlich erhalten kann, während die das Fluid beeinflussenden Kräfte P, Q, R dabei nicht im Wege stehen und äußere Kräfte solcher Art auf das Gefäß ausgeübt werden, die zu jedem Zeitpunkt mit jenem im Gleichgewicht festgelegt werden. Dann werden aber auch, wenn zwischen diesen Kräften eine bestimmte mittels einer Mörserkeule auf das Fluid wirkt, weil sie ja dann nach Belieben verändert werden kann, die Drücke im Fluid in jedem Moment nach Belieben verändert werden können, was auch die aus der Lösung abgeleitete Rechnung aufzeigen muss. Denn wegen der drei konstanten Geschwindigkeiten werde $u = \alpha$, $v = \beta$, $w = \gamma$ gesetzt, und der ersten Gleichung wird freilich von selbst Genüge geleistet. Dann wird aber $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ werden, woher wegen

$$Pdx + Qdy + Rdz = dS$$

wie zuvor gelten wird

$$dp = bdS \quad \text{und} \quad p = bS + f : t.$$

Also wird der Druck in dem ganzen Gefäß in jedem Moment $p = bS + C$ sein, und so hängt er von der Kräftewirkung S auf dieselbe Weise ab wie im

Fall der Ruhe, aber zu verschiedenen Zeiten kann dieser Druck nach belieben variiert werden, genauso wie es die Natur der Frage erfordert.

Bemerkung

§59 Dieser Fall hätte aus dem vorhergehenden, in welchem die ganze Masse des Fluids in Ruhe verbleibt, nach dem in der Mechanik gebräuchlichen Prinzip abgeleitet werden können, dass bei der Bewegung von Körpern alles dasselbe bleibt, solange das ganze System derer darüber hinaus gleichmäßig in eine Richtung vorwärtsbewegt zu werden aufgefasst wird. Aber hier kommt wegen der angreifenden Kräfte P, Q, R ein anderer Unterschied hinzu; denn in Ruhe hält jedes Element des Fluids ununterbrochen derselben Kraft stand, während aber die Masse des Fluids bewegt wird und dasselbe Element die einen und die anderen Orte passiert, kann es natürlich geschehen, dass es nacheinander von den einen und den anderen Kräften angegriffen wird, weil diese Kräfte ja vom Ort abhängen, wie es meistens zu geschehen pflegt. Weil die Größe S, welche im Fall der Ruhe konstant blieb, also hier für dasselbe Element des Fluids variabel ist, war eine eigene Lösung von Nöten. Es ist aber sittsam festzuhalten, wenn die wirkenden Kräfte nicht so beschaffen sind, dass die Formel $Pdx + Qdy + Rdz$ eine Integration zulässt, dass eine solche Bewegung dann genauso wenig Geltung haben kann die die Ruhe, auf welche Weise auch immer die von außen wirkenden Kräfte ausgeübt werden würden. Wenn natürlich ein Fall solcher Art existierte, könnte, auch wenn dem Fluid der Anfang der gleichmäßigen Bewegung in eine Richtung aufgeprägt worden wäre, diese dennoch in keiner Weise bewahrt werden, sondern das Gleichgewicht wäre ununterbrochen gestört; und daher ist in diesem Fall von konstanten Geschwindigkeiten zu verstehen, dass dies zu einem Widerspruch führt. Schließlich wird daraus auch deutlicher eingesehen, dass alle äußeren Umstände wie beispielsweise das Gefäß und entweder das Gefäß allein oder auch das Fluid mithilfe einer Mörserkeule angreifende Kräfte in die kanonischen die Bewegung von Fluiden ausdrückenden Gleichungen nicht eingehen, sondern erst nach durchgeführter Integration die dadurch in die Rechnung eingeführten beliebigen Funktionen an diese angepasst werden müssen, welche Funktionen auch immer so beschaffen sind, dass sie vollkommen alle äußeren Umstände in sich umfassen.

PROBLEM 29

§60 *Wenn die drei Geschwindigkeiten u, v, w eines Punktes des Fluids durch Funktionen der Zeit t allein ausgedrückt werden, zu ermitteln, ob und unter welchen Bedingungen eine solche Bewegung existieren kann und, während die einzelnen Teilchen des Fluids von irgendwelchen Kräften angegriffen werden, dann aber den Druck in der ganzen Masse des Fluids ausfindig zu machen.*

LÖSUNG

Im selbem Moment werden alle Elemente des Fluids mit der gleichen Bewegung in dieselbe Richtung getragen werden, und, während die Zeit fließt, wird allen sowohl in Bezug auf die Geschwindigkeit als auch in Bezug auf die Richtung die gleiche Veränderung aufgeprägt zu werden festgelegt; daher, weil die einzelnen Elemente des Fluids ununterbrochen dieselben Dichten beibehalten, wird die ganze Masse wie ein Festkörper vorwärts bewegt werden, und weil sie immer denselben Grenzen einbeschreiben ist, wird es in einem Gefäß eingeschlossen zusammen mit dem Gefäß in einer progressiven Bewegung vorwärts bewegt, wobei natürlich eine Drehbewegung ausgeschlossen ist. Weil also u, v und w Funktionen nur der zeit t sind, wird der ersten Gleichung

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0$$

sofort von selbst Genüge geleistet; des Weiteren werden wir für die andere Gleichung, wegen

$$U=\left(\frac{du}{dt}\right),\quad V=\left(\frac{dv}{dt}\right),\quad W=\left(\frac{dw}{dt}\right)$$

und daher auch diesen Größen allein von t, haben

$$\frac{2gdp}{b}=2gdS-dx\left(\frac{du}{dt}\right)-dy\left(\frac{dv}{dt}\right)-dz\left(\frac{dw}{dt}\right),$$

in welcher die Zeit t konstant angenommen wird. Daher wird, solange die Formel $dS = Pdx + Qdy + Rdz$ integrierbar ist, auch diese Gleichung eine Integration zulassen und die angenommene Bewegung bestehen können: Und es wird werden

$$\frac{2gp}{b}=2gS-x\left(\frac{du}{dt}\right)-y\left(\frac{dv}{dt}\right)-z\left(\frac{dw}{dt}\right)+f:t.$$

Solange also die so das Gefäß wie das Fluid angreifenden Kräfte so beschaffen waren, dass sie eine solche Bewegung bei einem Festkörper verursachen, wird auch das Fluid dieselbe Bewegung durchführen; und weil jenes auf ja unendlich viele Arten geschehen kann, weil es freilich immer möglich ist, jenen Kräften darüber hinaus immer zwei einander betragsmäßig gleiche und entgegen gerichtete hinzuzufügen, kann, wenn deren eine zugleich mittels eines Kolbens auf den Fluid wirkt, zu jedem Moment der Druck nach Belieben verändert werden, welche Änderung in jener beliebigen Funktion $f : t$ enthalten ist. Daher ist es klar, dass es natürlich passieren kann, dass sich die fluide Masse auf die vorgeschriebene Weise bewegt, und auf welche Weise auch immer sich die dafür verlangten Kräfte verhalten, es ist immer möglich, den Druck zu jeder Zeit durch die ganze Masse hindurch anzugeben, welcher in diesem Fall nicht nur von der Wirkung S, sondern auch den Koordinaten x, y, z abhängen wird.

KOROLLAR 1

§61 Wenn das Fluid also in einem Gefäß eingeschlossen aufgefasst wird, dass das Gefäß von einer progressiven Bewegung getragen wird, welche die Geschwindigkeiten u, v, w aufzeigen, wird das Fluid in Bezug auf das Gefäß ruhen und so betrachtet werden können, mit diesem quasi einen Festkörper zu bilden.

KOROLLAR 2

§62 Weil dies dennoch nicht im Wege steht, werden die Drücke im Fluid auch auf irgendeine Weise variabel sein können, während sie zuerst von der Kräftewirkung S, welche natürlich vom Ort anhängt, dann aber auch von den drei Variablen x, y, z, die auch für dasselbe Element des Fluids entsprechend verändert werden, abhängen; und diese letzte Veränderung ist zu verstehen aus der ungleichmäßigen Bewegung zu entspringen.

KOROLLAR 3

§63 Außer diesen Veränderungen, welche so aus der Kräftewirkung wie von der Ungleichheit der Bewegung hervorgehen, kann der Druck irgendeiner Veränderung mit der Zeit unterworfen sein. Dennoch wird indes für jede Zeit, wenn der Druck an einer Stelle bekannt ist, der Druck auch an allen anderen Stellen angegeben werden können.

BEMERKUNG

§64 Solange die angreifenden Kräfte P, Q, R also so beschaffen sind, dass die Formel $Pdx + Qdy + Rdz$ eine Integration zulässt, kann die fluide Masse alle progressiven Bewegungen erhalten, die Festkörpern zukommen, wenn nur die Dichte des Fluids konstant war und keine Veränderung von den angreifenden Kräften zulässt. Ob es aber auch eine Drehbewegung genauso wie ein Festkörper ausführen kann, tritt daraus nicht klar zutage; und diese Untersuchung heben wir für das folgende Kapitel auf, wo wir diesen Gegenstand allgemeiner behandeln werden; während nämlich bei einem um eine feste Achse rotierenden Festkörper die Geschwindigkeiten den Abständen von der Achse selbst proportional sind, können im Fluid auch andere Proportionen Geltung haben, weil hier keine Notwendigkeit besteht, dass die einzelnen Elemente ihre Umdrehungen in derselben Zeit vollführen. In diesem Kapitel bleibt es also nur übrig, Fälle solcher Art zu betrachten, in denen zwischen den drei Geschwindigkeiten ein bestimmtes konstantes Verhältnis vorgeschrieben wird, während eine beliebige derer auf irgendeine Weise variabel angenommen wird, eine Bewegung von welcher Art, weil sie ja von der Bewegung von Festkörpern im höchsten Maße abweicht, besonders dazu dienen wird, unser Unterfangen zu beleuchten.

PROBLEM 30

§65 *Wenn die Geschwindigkeiten u, v, w eines gewissen Punktes überall und immer ein konstantes Verhältnis zueinander beibehalten, die Bedingungen herauszufinden, unter welchen eine solche Bewegung existieren kann, während die einzelnen Elemente des Fluids von irgendwelchen Kräften P, Q, R angegriffen werden.*

LÖSUNG

Weil die drei Geschwindigkeiten u, v, w ja ein konstantes Verhältnis zueinander haben, werden die einzelnen Elemente des Fluids in dieselbe Richtung bewegt werden, mit einer irgendwie variablen Geschwindigkeit; ob diese Bewegung und unter welchen Bedingungen sie Geltung haben kann, muss ausfindig gemacht werden. Nachdem also die neue Variable ♉ eingeführt worden ist, welche irgendeine Funktion der vier Größen x, y, z und t sei, wollen wir festlegen

$$u = \alpha ♉, \quad v = \beta ♉ \quad \text{und} \quad w = \gamma ♉,$$

dass α, β, γ konstante Größen sind, und damit der ersten Gleichung Genüge geleistet wird, muss gelten

$$\alpha \left(\frac{d♉}{dx}\right) + \beta \left(\frac{d♉}{dy}\right) + \gamma \left(\frac{d♉}{dz}\right) = 0.$$

Weil aber gilt

$$d♉ = dx \left(\frac{d♉}{dx}\right) + dy \left(\frac{d♉}{dy}\right) + dz \left(\frac{d♉}{dz}\right),$$

wird gelten

$$\alpha d♉ = -\beta dx \left(\frac{d♉}{dy}\right) - \gamma dx \left(\frac{d♉}{dz}\right) + \alpha dy \left(\frac{d♉}{dx}\right) + \alpha dz \left(\frac{d♉}{dz}\right)$$

oder aber

$$\alpha d♉ = (\alpha dy - \beta dx) \left(\frac{d♉}{dy}\right) + (\alpha dz - \gamma dx) \left(\frac{d♉}{dz}\right),$$

welcher Gleichung Genüge geleistet zu werden eingesehen wird, solange ♉ eine Funktion der variablen Größen $(\alpha y - \beta x)$ und $(\alpha z - \gamma x)$ oder dieser $\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)$ und $\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}\right)$ ist, welchen auch die dritte t hinzugefügt werden kann. Es sei ♉ nämlich irgendeine Funktion dieser drei Variablen

$$\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right), \quad \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}\right) \quad \text{und} \quad t,$$

welche differenziert liefere:

$$d♉ = L \left(\frac{dx}{\alpha} - \frac{dy}{\beta}\right) + M \left(\frac{dx}{\alpha} - \frac{dz}{\gamma}\right) + N dt,$$

und es wird gelten

$$\left(\frac{d♉}{dx}\right) = \frac{1}{\alpha} L + \frac{1}{\alpha} M, \quad \left(\frac{d♉}{dy}\right) = -\frac{1}{\beta} L \quad \text{und} \quad \left(\frac{d♉}{dz}\right) = -\frac{1}{\gamma} M,$$

woher natürlich wird:

$$\alpha\left(\frac{d\mho}{dx}\right)+\beta\left(\frac{d\mho}{dy}\right)+\gamma\left(\frac{d\mho}{dz}\right)=0.$$

Nachdem also eine solche Funktion für $\mho$ festgelegt worden ist, wird erschlossen werden:

$$U=\alpha\alpha\mho\left(\frac{d\mho}{dx}\right)+\alpha\beta\mho\left(\frac{d\mho}{dy}\right)+\alpha\gamma\mho\left(\frac{d\mho}{dz}\right)+\alpha\left(\frac{d\mho}{dt}\right),$$

welche wegen

$$\alpha\left(\frac{d\mho}{dx}\right)+\beta\left(\frac{d\mho}{dy}\right)+\gamma\left(\frac{d\mho}{dz}\right)=0$$

in $U=\alpha\left(\frac{d\mho}{dt}\right)$ übergeht, und auf die gleiche Weise wird gelten

$$V=\beta\left(\frac{d\mho}{dt}\right)\quad\text{und}\quad W=\gamma\left(\frac{d\mho}{dt}\right).$$

Deswegen wird sich die andere für die Bewegung von Fluiden gefundene Gleichung so verhalten, indem die Zeit t als konstant betrachtet wird,

$$\frac{2gdp}{b}=2gdS-(\alpha dx+\beta dy+\gamma dz)\left(\frac{d\mho}{dt}\right),$$

welche, wenn die Formel $dS=Pdx+Qdy+Rdz$ integrierbar ist, absolut erfordert, dass auch der andere Teil $(\alpha dx+\beta dy+\gamma dz)\left(\frac{d\mho}{dt}\right)$ eine Integration zulässt; die kann nur geschehen, wenn $\left(\frac{d\mho}{dt}\right)$ eine Funktion dieser zwei Größen $\alpha x+\beta y+\gamma z$ und t ist, was mit der oberen Bedingung zusammen nur möglich ist, wenn $\frac{d\mho}{dt}$ eine Funktion der Zeit t allein ist. Deswegen muss die Größe $\mho$ so beschaffen sein, dass gilt

$$\mho=\text{Funkt. }:\left(\left(\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}\right)\ \text{ und }\ \left(\frac{x}{\alpha}-\frac{z}{\gamma}\right)\right)+\Gamma:t,$$

dass $\left(\frac{d\mho}{dt}\right)=\Gamma':t$ wird; dann wird aber aufgefunden werden:

$$\frac{2gp}{b}=2gS-(\alpha x+\beta y+\gamma z)\Gamma':t+\Delta:t,$$

mit $\Gamma':t=\frac{d\cdot\Gamma:t}{dt}$.

KOROLLAR 1

§66 Das Element des Fluids in Z wird also mit einer Geschwindigkeit bewegt, welche ist

$$= \mho\sqrt{\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma},$$

und ihre Richtung ist zur Achse OA in einem Winkel geneigt, dessen Kosinus dieser ist

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma}},$$

zur Achse OB in einem Winkel, dessen Kosinus dieser ist

$$\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma}},$$

und zur Achse OC in einem Winkel, dessen Kosinus dieser ist

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma}}.$$

KOROLLAR 2

§67 Weil die Richtung dieser Bewegung also überall und immer dieselbe ist, werden alle Elemente des Fluids entlang zueinander paralleler gerader Linien vorwärts bewegt. Die Geschwindigkeit wird aber so in Bezug auf den Ort wie die Zeit in höchstem Maße variabel sein können, solange $\mho$ nur eine Funktion solche Art ist, wie wir sie beschrieben haben.

KOROLLAR 3

§68 Hier kann aber die größte Veränderlichkeit auftreten, weil sich für $\mho$ irgendeine Funktion dieser zwei Größen $\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}$ und $\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}$ annehmen lässt, und es möglich ist, ihr darüber hinaus irgendeine Funktion der Zeit hinzuzufügen.

KOROLLAR 4

§69 Aus den oben erwähnten Dingen tritt es klar zu tage, dass die Buchstaben U, V, W die Beschleunigungen der Bewegung in die Richtung der Koordinaten x, y, z ausdrücken; daher werden, wenn $\Gamma : t = 0$ und daher

$\left(\frac{d\mho}{dt}\right) = 0$ war, diese Beschleunigungen verschwinden, und jedes Element wird sich gleichmäßig in eine Richtung bewegen.

BEMERKUNG

§70 Diese Bewegung wird der ziemlich ähnlich entdeckt, in welcher sich Flüsse bewegen; wenn nämlich allein die Schwerkraft in Richtung ZY auf das Fluid wirkt, wird gelten

$$P = 0, \quad Q = 0 \quad \text{und} \quad R = -1 \quad \text{und daher} \quad S = -z,$$

und wenn weiter die von der Zeit abhängende Funktion verschwindet, dass gilt

$$\mho = \text{Funkt.} : \left(\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} \right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma} \right) \right) \quad \text{und} \quad p = b(a - z),$$

und so verschwindet der Druck in der horizontalen Ebene zur Höhe $z = a$. Und es ist in der Tat nicht notwendig, dass die Richtung des Fluids horizontal ist, sondern die Bewegung kann bestehen, auch wenn das Fluid entweder nach oben oder nach unten bewegt wird, oder irgendeinen schrägen Verlauf hat, was sich freilich schwer vorgestellt werden kann, weil das Fluid durch seine oberste Oberfläche hindurchgehen müsste. Aber hier tritt noch ein anderer Umstand auf, dass der Druck im sich über der Höhe a befindenden Fluid negativ werden würde, und daher die Kontinuität des Fluids aufgelöst und es quasi in einzelne Tropfen aufgelöst werden würde. Am Anfang habe ich aber angemerkt, dass diese Prinzipien, welche ich aufgestellt habe, so auf die Kontinuität des Fluids gestützt sind, dass, wo diese aufhört, jene Prinzipien nicht weiter Geltung haben können: Deswegen sind auch Fälle solcher Art, wo das Fluid aufhört kontinuierlich zusammenzuhängen, davon auszunehmen. Ansonsten ist, wann immer wir hier eine Bewegung als möglich voraussagen, dies immer so aufzufassen, dass äußere Kräfte solcher Art gegeben sein können, dass das Fluid durch deren Wirkung jene Bewegung erhalten kann. Aber das hier behandelte Problem kann auf die folgende Weise allgemeiner gestellt und aufgelöst werden.

PROBLEM 31

§71 *Wenn die drei Geschwindigkeiten u, v, w eines Elements so beschaffen sind, dass gilt*

$$u = \alpha\mho + \Gamma : t, \quad v = \beta\mho + \Delta : t \quad \text{und} \quad w = \gamma\mho + \Sigma : t,$$

wobei $\mho$ *irgendeine Funktion bezeichnet, die Bedingungen zu ermitteln, unter welchen eine solche Bewegung bestehen kann, während die einzelnen Elemente des Fluids von irgendwelchen Kräften P, Q, R angegriffen werden.*

LÖSUNG

Hier erfordert die allgemeine erste Gleichung wie im vorhergehenden Problem, dass $\mho$ eine Funktion dieser zwei Größen $\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)$ und $\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}\right)$ ist, und es nun nicht nötig, zu diesen eine gewisse Funktion der Zeit t hinzuzufügen, weil in der Annahme solche unbestimmten Funktionen schon zu den drei Geschwindigkeiten hinzuaddiert worden sind. Weil also daraus gilt

$$\alpha\left(\frac{d\mho}{dx}\right) + \beta\left(\frac{d\mho}{dy}\right) + \gamma\left(\frac{d\mho}{dz}\right) = 0,$$

wird erhalten werden

$$U = \left(\frac{du}{dt}\right) = \Gamma' : t, \quad V = \Delta' : t \quad \text{und} \quad \Sigma' : t$$

und daher wird, nachdem die Kräftewirkung $\int(Pdx + Qdy + Rdz) = S$ gesetzt worden ist, die den Zustand es Druckes aufzeigende Gleichung diese sein

$$\frac{2gp}{b} = 2gS - x\Gamma' : t - y\Delta' : t - z\Sigma' : t + \Pi : t.$$

KOROLLAR 1

§72 Dieses Problem erstreckt sich also um vieles weiter als das vorhergehende, weil nicht nur die Bewegungsrichtung in einem Punkt mit der Zeit sehr stark variiert werden kann, sondern zu derselben Zeit die Bewegungsrichtung in den verschiedenen Elementen des Fluids verschieden sein kann.

KOROLLAR 2

§73 Zum selben Zeitpunkt, in welchem die Funktionen $\Gamma : t$, $\Delta : t$, $\Sigma : t$ durch die ganze Masse des Fluids hindurch dieselben Werte haben, weil ja $\eth$ vom Ort Z abhängt, werden in den verschiedenen Punkten aber nicht nur die Geschwindigkeit sonder auch die Bewegungsrichtung höchst verschieden sein können: Dennoch werden $\frac{u}{\alpha} - \frac{v}{\beta}$ und $\frac{u}{\alpha} - \frac{w}{\gamma}$ überall dieselben Werte erhalten.

BEMERKUNG

§74 Hier weicht die Bewegung aber noch vom Strom von Flüssen ab; wenn wir nämlich die gefundenen Formeln hierauf anwenden wollten, müssten, damit die Bewegung in demselben Punkt als dieselbe hervorgeht, die Funktionen der Zeit $\Gamma : t$, $\Delta : t$, $\Sigma : t$ zuerst konstante Größen darstellen, dann entspränge aber wegen $S = -z$ $p = b(a - z)$, und so verschwänden die Drücke in einer gewissen horizontalen Ebene. Also könnte den Teilchen des Fluids keine vertikale Bewegung zugeteilt werden, weil das Fluid andernfalls über der höchsten Oberfläche zuzulassen wäre, es wäre also $w = 0$ und daher auch $\Gamma : t$ und $\Sigma : t$, woher die einzelnen Elemente des Fluids in horizontalen Ebenen bewegt werden würden und es deshalb hier keine Abschüssigkeit gäbe, welche dennoch eine unerlässliche Eigenschaft ist. Daher ist die Untersuchung der Bewegung von Flüssen als eine Angelegenheit eines um vieles größeren Umfangs anzusehen. Dennoch erkennen wir hier indes ein Beispiel eines Flusses solcher Art, dessen einzelne Teilchen in einer horizontalen Bewegung vorwärts bewegt werden, deren Richtung aber genauso wie die Geschwindigkeit auf irgendeine Weise variabel ist. Weil dies dem dennoch nicht im Wege steht, wird der Druck überall vollkommen auf dieselbe Weise allein von der Tiefe abhängen wie wenn das Fluid im Ruhezustand wäre. Weil in diesem Fall aber $\gamma = 0$ ist, wird $\eth$ irgendeine Funktion dieser zwei Größen $\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)$ und z werden, und sie wird in derselben horizontalen Ebene in allen Punkten als dieselbe aufgefunden werden, wo $\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}$ vom selben Wert sein wird, das heißt in allen zur Achse OA im Winkel, dessen Tangens $= \frac{\beta}{\alpha}$ ist, geraden Linien, welche also einander parallel sein werden: Und alle auf einer solchen geraden Linie gelegenen Teilchen des Fluids werden von der gleichen Bewegung getragen werden: Aber sie werden sich nicht entlang dieser Geraden selbst bewegen, weil ihre Geschwindigkeiten nach Setzen von $\Gamma : t = m$ und $\Delta : t = n$ $u = \alpha\eth + m$ und $v = \beta\eth + n$ sein werden, woher die Geschwindigkeiten freilich gleich sein werden, aber die Richtung von jener Geraden irgendwie abweichen werden, wenn nicht $m : n = \alpha : \beta$ ist. Solange sie also auf diese Weise von dieser geraden Linie zu einer anderen ihr parallelen übertragen werden, wo eine eine Geschwindigkeit wie Richtung gegeben sein wird, ist es ersichtlich, dass es geschehen ist, dass die einzelnen Elemente des Fluids auf gekrümmten Linien mit höchst ungleichen Bewegungen getragen werden. Wenn also der Weg eines Teilchens in einer horizontalen Ebene mithilfe einer Gleichung zwischen den zwei Koordinaten zwischen x und y zu bestimmen ist, wird wegen

$$dx = dx(\alpha\Taurus + m) \quad \text{und} \quad dy = dt(\beta\Taurus + n)$$

durch Eliminieren von dt werden

$$\Taurus(\beta dx - \alpha dy) + ndx - mdy = 0.$$

Weil aber die Tiefe z hier dieselbe bleibt, wird $\Taurus$ eine Funktion von $\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}$ oder $\beta x - \alpha y$ sein, wird, indem für diese $\Theta' : (\beta x - \alpha y)$ geschrieben wird, werden

$$nx - my + \Theta : (\beta x - \alpha y) = \text{Konst.}$$

Also kann die Funktion Θ so angenommen werden, dass eine gegebene Kurve hervorgeht, welche zu den auf diese Ebene bezogenen äußeren Teilchen die Form des den Fluss begrenzenden Ufers darstellen wird und so wird wird zu den einzelnen Tiefen nach Belieben eine Form des Ufers und daher der Hohlraum des ganzen Flussbetts gebildet werden können.

KAPITEL IV

ÜBER DIE ROTATIONSBEWEGUNG VON HOMOGENEN INKOMPRESSIBLEN FLUIDEN

PROBLEM 32

§75 *Wenn das Fluid* (Fig. 26) *so um die feste Achse OC rotiert, dass die Bewegung der einzelnen Elemente uniform ist, die Geschwindigkeit hingegen irgendeiner Funktion des Abstands von derselben Achse proportional ist, ausfindig zu machen, ob es eine solche Bewegung geben kann.*

LÖSUNG

Es werde das Element, von den Koordinaten $OX = x$, $XY = y$ und $YZ = z$ bestimmt, des Fluids in Z betrachtet, dessen Abstand von der Achse OC also $ZV = \sqrt{xx + yy}$ ist, welcher also bei der Bewegung nicht verändert wird.

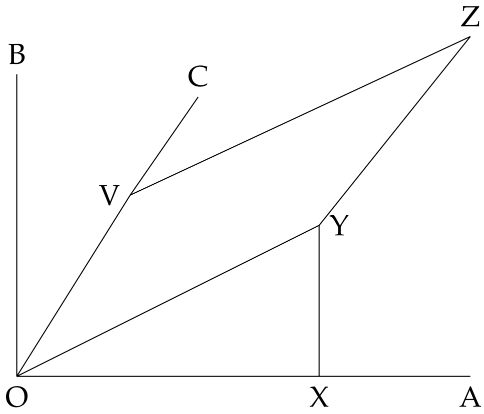


Fig. 26

Weil das Element Z also in der zur Achse AC normalen Ebene um den Punkt V rotiert wird, wird dessen Geschwindigkeit w verschwinden, die Geschwindigkeiten u und v sind hingegen so beschaffen, dass, während die Koordinaten x und y im winzig kleinen Zeitabschnitt dt die Zuwächse udt und vdt erhalten, der Abstand $\sqrt{xx + yy}$ nicht verändert wird, woraus erschlossen wird, dass $ux + vy = 0$ sein wird. Es werde also $u = ty$ und $v = -Tx$ gesetzt, die ganze Geschwindigkeit wird $= T\sqrt{xx + yy}$ sein, und daher nach der Annahme T eine Funktion von $\sqrt{xx + yy}$; daher wollen wir $T = \Gamma : \frac{xx+yy}{2}$ setzen, dass gilt

$$\left(\frac{dT}{dx}\right) = x\Gamma' : \frac{xx + yy}{2} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dT}{dy}\right) = y\Gamma' : \frac{xx + yy}{2},$$

dann aber auch $\left(\frac{dT}{dz}\right)$ und $\left(\frac{dT}{dt}\right) = 0$. Nachdem diese Dinge bezüglich der Bewegung festgelegt worden sind, ist zu sehen, ob sie mit den Bewegungsprinzipien von Fluiden in Einklang gebracht werden können. Und die erste Gleichung erfordert wegen $w = 0$ freilich, dass gilt

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) = 0;$$

dies passiert glücklicherweise, weil gilt

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = y\left(\frac{dT}{dx}\right) = xy\Gamma' : \frac{xx+yy}{2} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dv}{dy}\right) = -x\left(\frac{dT}{dy}\right) = -xy\Gamma' : \frac{xx+yy}{2}.$$

Weiter werden wir aber für die andere Gleichung, indem wir für $\Gamma' : \frac{xx+yy}{2}$ der Kürze wegen L schreiben, dass $dT = Lxdy + Lydy$ ist, haben

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = Lxy, \ \left(\frac{du}{dy}\right) = T + Lyy, \ \left(\frac{dv}{dx}\right) = -T - Lxx, \ \left(\frac{dv}{dy}\right) = -Lxy,$$

woher wir folgern:

$$\begin{aligned} U &= TyLxy - Tx \cdot (T + Lyy) = -TTx, \\ V &= -Ty(T + Lxx) + Tx \cdot Lxy = -TTy \end{aligned}$$

und $W = 0$. Daher, weil die Formel $Udx + Vdy = -TT(xdy + ydy)$ natürlich eine Integration zulässt, weil T eine Funktion von $xx + yy$ ist, wird die andere für die Bewegung gefundene Gleichung integrierbar, wie es die Möglichkeit der Bewegung erfordert, und nachdem die Kräftewirkung wie folgt festgelegt worden ist

$$\int (Pdx + Qdy + Rdz) = S,$$

wird der Druck so bestimmt, dass gilt

$$\frac{2gp}{b} = 2gS + \int TT(xdx + ydy) + f : t.$$

Insgesamt wird die beschriebene Bewegung im Fluid also möglich sein: Es wird der Mühe wert sein, sie genauer zu erforschen. Der Abstand von der Achse $ZV = \sqrt{xx + yy}$ sei $= s$, und das Integral werde wie folgt festgelegt

$$\int TT(xdx + ydy) = \int (TTsds) = \Gamma : s,$$

und es wird $TT = \frac{\Gamma' : s}{s}$ sein, woher die Geschwindigkeit, mit welcher das Element Z im Abstand $ZC = s$ um die Achse OC rotiert, sein wird

$$= Ts = \sqrt{s\Gamma' : s}$$

und der Druck ebendort wird aufgefunden als

$$p = bS + \frac{b}{2g}\Gamma : s + f : t.$$

KOROLLAR 1

§76 Wenn also die Geschwindigkeit des Elements Z, dessen Abstand von der Drehachse $ZV = s$ ist, $= \Delta : s$ gesetzt wird, wird daher werden

$$\Gamma' : s = \frac{(\Delta : s)^2}{s}$$

und der Druck wird aufgefunden als

$$p = bS + \frac{b}{2g}\int \frac{ds}{s}(\Delta : s)^2 + f : t.$$

Daher wird, wenn jene Geschwindigkeit $= \alpha s^n$ ist,

$$p = bS + \frac{\alpha\alpha b s^{2n}}{4ng} + f : t;$$

wo zu bemerken ist, dass im Fall konstanter Geschwindigkeit $= \alpha$ wegen $n = 0$ wird

$$p = bS + \frac{\alpha\alpha b}{2g}\log s + f : t.$$

KOROLLAR 2

§77 Die unbestimmte Funktion der Zeit geht daher in den Druck p ein, weil er ja durch äußere Kräfte zu jeder Zeit nach Belieben entweder vermehrt oder vermindert werden kann. Was auch immer aber durch äußere Kräfte bewirkt werden kann, es ist notwendig, dass es in der allgemeinen Lösung enthalten ist. Wenn also eine solche Veränderung in den äußeren Kräften nicht zugelassen wird, muss auch die Funktion der Zeit weggelassen werden.

KOROLLAR 3

§78 Welche Wirbelbewegung dieser Art also auch immer angesetzt wird, die wirkenden Kräfte P, Q, R, auf welche Weise auch immer sie beschaffen sind, verhindern es in keinster Weise, dass sie bestehen kann, solange die Formel

$$Pdx + Qdy + Rdz = dS$$

eine Integration zulässt; indem äußere Kräfte zur Hilfe genommen werden, wird natürlich immer eine solche Bewegung erhalten werden können.

KOROLLAR 4

Weil die ganze fluide Masse ja um die feste Achse OC rotiert, von welcher die einzelnen Elemente denselben Abstand beibehalten, kann die ganze Masse in einem runden Gefäß eingeschlossen aufgefasst werden, dessen Achse CO ist. Für die Bewegung ist aber nicht wichtig, was für eine Form selbigem zugeteilt wird, solange ihre zur Achse OC normalen Schnittebenen nur Kreise waren.

BEMERKUNG 1

§80 Um diese Dinge deutlicher darzustellen, wollen wir das Fluid allein der Schwerkraft ausgesetzt festlegen, deren Richtung CO sei, oder die Drehachse OC werde als Normale gesetzt, dass $S = -z$ ist; daher werden wir für den Druck haben

$$p = b(h - z) + \frac{b}{2g}\int \frac{ds}{s}(\Delta : s)^2 + f : t,$$

während die Geschwindigkeit zum Abstand $= s = \Delta : s$ ist. Wir wollen weiter annehmen, dass in den äußeren Kräften keine Veränderung auftritt, dass $f : t$ verschwindet. Also stelle (Fig. 27) die Form $EEFF$ des durch die Achse OC durchführten vertikalen Schnitts dar, in welchem GHG die oberste Oberfläche des Fluids sei, in welcher der Druck überall verschwindet, woher, nachdem die Distanz von der Achse OP als $= s$ angenommen worden ist, gelten wird

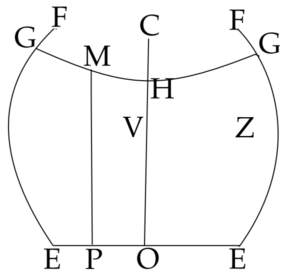


Fig. 27

$$\text{Die Höhe } PM = h + \frac{1}{2g}\int \frac{ds}{s}(\Delta : s)^2,$$

mit welcher Gleichung die oberste Form der Oberfläche GHG ausgedrückt wird. Nachdem also die Rotationsgeschwindigkeit für die Distanz s als $= \alpha s^n$ angenommen worden ist, wird werden

$$PM = h + \frac{\alpha\alpha}{4gn}s^{2n},$$

woher die Oberfläche GHG um die Mitte H herum ausgehöhlt sein wird und dort wird die kleinste Höhe $OH = h$ sein, wenn n freilich eine positive Zahl war. Aber wenn n hingegen eine negative Zahl war, wird sie in der Mitte H sogar ins unendliche herabgesenkt werden und einen Hohlraum um die Achse herum zurücklassen. In dem Fall, in dem $n = 1$ ist und das ganze Fluid in derselben Zeit gedreht wird, wird die Kurve freilich eine um die Achse HC beschriebene Parabel sein, deren Parameter $= \frac{4g}{\alpha\alpha}$ ist: Und wenn die Zeit für eine Umdrehung, das heißt $\frac{2\pi}{\alpha}$ Minutensekunden, $= \theta''$ gesetzt wird, wird es sich wie folgt verhalten

$$\text{der Parameter } = \frac{g}{\pi\pi}\theta\theta \quad \text{und der Druck in Z} = b(h-z) + \frac{\pi\pi b}{\theta\theta}\cdot\frac{ss}{g},$$

woher zugleich der Druck auf die Gefäßwand bekannt wird, welcher sich so verhält, dass, umso umfangreicher es war, er für dieselbe Höhe umso größer sein wird.

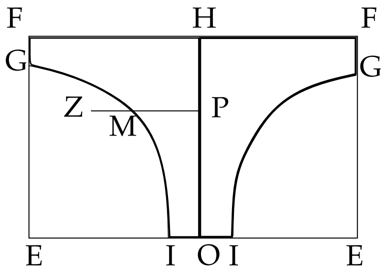


Fig. 28

Wenn daher aber $n = 0$ oder sogar eine negative Zahl ist, entsteht der Umstand, dass die der Achse sehr nahen Elemente ihre Umdrehungen in unendlich kurzer Zeit vollführen. Aber dieser Umstand wird von selbst beseitigt, weil das Fluid einen leeren Raum um die Achse zurücklässt; um eine Bewegung von dieser Art darzustellen, sei $n = -\frac{1}{2}$, dass die Geschwindigkeit im Abstand $= s$ zur Achse $\frac{\alpha}{\sqrt{s}}$ und der Druck $p = b(h-z) - \frac{\alpha\alpha b}{2gs}$ ist, welche für die Höhe z im Abstand $s = \frac{\alpha\alpha}{2g(h-z)}$ verschwindet. Der um die Achse $OH = h$ frei gelassene Raum $FFGGII$ (Fig. 28) wird also von Hyperbeln begrenzt, wobei HP, $PM = \frac{\alpha\alpha}{2g}$ ist, und bietet so einen Strudel dar, so dass der

Druck durch GI hindurch überall verschwindet; außerhalb dieses Strudels in Z, wo das Fluid in Z aufgefunden wird, wird der Druck dieser sein

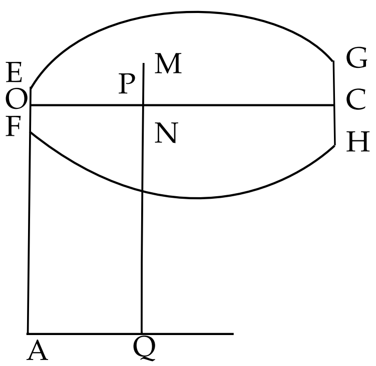
$$p = b \cdot HP.\frac{\alpha\alpha b}{2g \cdot PZ} \quad \text{und} \quad p = \frac{\alpha\alpha b}{2g}\left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{PZ}\right) = \frac{\alpha\alpha b \cdot MZ}{2g \cdot PM \cdot PZ}.$$

Strudel oder Wirbel von dieser Art entstehen also, sooft die Rotationsgeschwindigkeit um die Achse entweder konstant ist oder in größeren Entfernungen schrumpft; und diesem Grund sind ohne Zweifel Meeresstrudel zuzuschreiben.

BEMERKUNG 2

§81 Während das Fluid allein der Schwerkraft ausgesetzt bleibt; wollen wir (Fig. 29) die Achse, um welche das Fluid rotiert wird, horizontal ist und die Schwerkraft entlang der Gerade OA wirkt, dass $P = 1$, $Q = 0$ und $R = 0$ und daher $S = x$ ist.

Fig. 29



Weiter sie die Geschwindigkeit in Abstand $= s$ von der Achse $= \Delta : s$, und der Druck wird werden

$$p = bx + \frac{b}{2g}\int \frac{ds}{s}(\Delta : s)^2,$$

indem $f : t$ weggelassen wird und wir die Veränderung aus äußeren Kräften zu entfernen. Wir wollen also zuerst den Fall betrachten, in welchem $\Delta : s = \alpha s$ ist und deshalb

$$p = b(x - h) + \frac{\alpha\alpha b}{2g} ss,$$

welcher Zustand in Figur 29 dargestellt ist, wo die Achse OC des Gefäßes $EFGH$ als Horizontale, die Gerade OA hingegen als Vertikale zu verstehen ist. Es werde auf ihr $OH = h$ genommen, und für den Punkt N in der vertikalen Ebene AOC, deren Abstand von der Achse $PN = s$ ist, wird der Druck dieser sein

$$p = b\left(\frac{\alpha\alpha}{2g} PN^2 - QN\right),$$

für den Punkt M, in welchem N sich nach einer halben Umdrehung befindet, wird er sein

$$p = b\left(\frac{\alpha\alpha}{2g}PM^2 - QM\right),$$

und so lässt dasselbe Element während der Bewegung verschiedene Drücke zu; damit diese nicht irgendwann negativ werden, könnte die Konstante $OA = h$ negativ angenommen werden. Damit er aber im in der Figur dargestellten Fall nicht irgendwann einmal negativ wird, muss ein fester Zylinder in das Gefäß eingefügt werden, dessen Radius $= k$ so groß sei, dass gilt

$$\frac{\alpha\alpha}{2g}kk - h - k = 0,$$

so dass der Druck außerhalb dieses Zylinders überall positiv wird und das Fluid um diesen Zylinder rotiert wird. Für den Fall $n = -\frac{1}{2}$ wird aber

$$p = b(x-h) - \frac{\alpha\alpha b}{2gs},$$

wo es deswegen gefällig ist h negativ anzunehmen, dass die Gerade OA zu verstehen ist sich nach unten zu neigen; dann wird es also sein wie folgt

$$\text{der Druck in } N = b\left(QN - \frac{\alpha\alpha}{2g\cdot PN}\right)$$

und

$$\text{der Druck in } M = b\left(QM - \frac{\alpha\alpha}{2g\cdot PM}\right),$$

weshalb ein so dicker Zylinder eingefügt werden muss, dass, nachdem sein Halbmesser $= k$ gesetzt worden ist, wird

$$h - k - \frac{\alpha\alpha}{2gk} = 0 \quad \text{oder} \quad hk - \frac{\alpha\alpha}{2g} = kk,$$

daher

$$k = \frac{1}{2}h - \sqrt{\frac{1}{4}hh - \frac{\alpha\alpha}{2g}},$$

woher es klar zutage tritt, dass hh größer sein muss als $\frac{2\alpha\alpha}{g}$. Des weiteren darf aber, weil der Druck in allzu großer Entfernung der Achse wiederum negativ werden würde, auch der Halbmesser des Gefäßes diesen Wert nicht überschreiten

$$\frac{1}{2}h + \sqrt{\frac{1}{4}hh - \frac{\alpha\alpha}{2g}}.$$

Im Übrigen ist es anzumerken, dass, während eine Bewegung von dieser Art einmal begonnen hat, sie darauf bestehen kann, und nicht einmal wegen der Reibung des Gefäßes abgeschwächt wird, weil das Gefäß selbst ja in der gleichen Bewegung um die Achse rotiert.

Bemerkung 3

§82 Wenn das Fluid von überhaupt keinen Kräften angegriffen wird, dass $S = 0$ ist, dann wird, nachdem die Geschwindigkeit im Abstand $= s$ von der Achse $\Delta : s$ gesetzt worden ist, der Druck im selben Abstand dieser sein

$$p = bh + \frac{b}{2g}\int \frac{ds}{s}(\Delta : s)^2,$$

nachdem jede Veränderung in den äußeren Kräften weggeschafft worden ist. Daher geht, nachdem die Geschwindigkeit $\Delta : s = \alpha s^n$ gesetzt worden ist, hervor

$$p = b\left(h + \frac{\alpha\alpha}{4ng}s^{2n}\right)$$

und im Fall $n = 0$ wird

$$p = b\left(h + \frac{\alpha\alpha}{2g}\log s\right).$$

Aber wenn $\Delta : s = \alpha s^{-m}$ ist, wird gelten

$$p = b\left(h - \frac{\alpha\alpha}{4mg}s^{-2m}\right).$$

Diese Fälle verdienen es, einzeln entwickelt zu werden.

I. Wenn $\Delta : s = \alpha s^n$ ist, dann kann h entweder > 0 oder $= 0$ oder < 0 sein. Und zuerst wird, wenn $h > 0$ ist, der Druck überall positiv sein, und am kleinsten freilich bei der Achse selbst, bei Entfernen von welcher er ununterbrochen wächst. Und so wird der ganze Zylinder des Fluids auf diese Weise rotiert werden können. Dasselbe passiert darauf auch, wenn $h = 0$ ist, nur mit diesem Unterschied, dass der Druck bei der Achse selbst verschwindet. Nachdem als drittes h negativ angenommen worden ist, wird

$$p = b\left(\frac{\alpha\alpha}{2gn}s^{2n} - h\right);$$

daher, weil der Druck als negativ hervorgeht, solange $s^{2n} < \frac{2gh}{\alpha\alpha}n$ ist, wird dieser Raum um die Achse herum leer zurückgelassen werden und das Fluid wird um diesen hohlen Zylinder herum rotieren. In diesen Fällen wird ein im Fluid eingetauchter punktförmiger Körper mit der Kraft $\frac{\alpha\alpha b}{2g}s^{2n-1}$ zur Achse gedrängt werden.

II. Wenn $\Delta : s = \alpha$ und $p = b\left(h + \frac{\alpha\alpha}{2g}\log s\right)$ ist, ist der Druck um die Achse herum bis hin zum Abstand $s = e^{\frac{-2gh}{\alpha\alpha}}$ negativ, wo er dann verschwindet; also wird ein so weiter leerer Zylinder um die Achse entstehen, um welchen das Fluid rotieren wird.

III. Wenn $\Delta : s = \alpha s^{-m}$ und $p = b\left(h - \frac{\alpha\alpha}{4mg}s^{-2m}\right)$ ist, tritt es klar zu tage, dass h notwendig positiv angenommen werden muss und einen leerer Zylinder um die Achse zurückgelassen werden wird, dessen Radius $= \sqrt{\frac{\alpha\alpha}{4mgh}}$ ist, dann aber im Fluid außerhalb dieser Achse der Druck ununterbrochen wächst, aber erst in unendlicher Entfernung $= bh$ wird. Also wird ein in diesem Abstand von der Achse $= s$ in das Fluid eingetauchtes Punktteilchen mit der Kraft $\frac{\alpha\alpha b}{2g}s^{-2m-1}$ zur Achse getrieben werden, welche dem Quadrat des Abstands von der Achse umgekehrt proportional wird, wenn $m = +\frac{1}{2}$ ist, und die Geschwindigkeit ist $= \frac{\alpha}{\sqrt{s}}$ oder steht im umgekehrt surdischen Verhältnis zum Abstand.

PROBLEM 33

§83 *Wenn das Fluid um irgendeine Achse rotiert wird oder die drei Geschwindigkeiten eines Punktes, also u, v, w, diesen Formeln proportional sind*

$$\alpha y - \beta z, \quad \gamma z - \alpha x, \quad \beta x - \gamma y,$$

die Bedingungen zu ermitteln, unter welchen eine solche Bewegung im Fluid existieren kann, während das Fluid von irgendwelchen Kräften P, Q, R angegriffen wird.

LÖSUNG

Wir wollen also festlegen:

$$U = T(\alpha y - \beta z), \quad v = T(\gamma z - \alpha x), \quad w = T(\beta x - \gamma y)$$

und die daher entstehenden Differentialformeln werden sein:

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = (\alpha y - \beta z)\left(\frac{dT}{dx}\right) \qquad \left(\frac{dv}{dx}\right) = -\alpha T + (\gamma z - \alpha x)\left(\frac{dT}{dx}\right) \qquad \left(\frac{dw}{dx}\right) = \beta T + (\beta x - \gamma y)\left(\frac{dT}{dx}\right)$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \alpha T + (\alpha y - \beta z)\left(\frac{dT}{dy}\right) \qquad \left(\frac{dv}{dy}\right) = (\gamma z - \alpha x)\left(\frac{dT}{dy}\right) \qquad \left(\frac{dw}{dy}\right) = -\gamma T + (\beta x - \gamma y)\left(\frac{dT}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right) = -\beta T + (\alpha y - \beta z)\left(\frac{dT}{dz}\right) \qquad \left(\frac{dv}{dz}\right) = \gamma T + (\gamma z - \alpha x)\left(\frac{dT}{dz}\right) \qquad \left(\frac{dw}{dz}\right) = (\beta x - \gamma y)\left(\frac{dT}{dz}\right)$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = (\alpha y - \beta z)\left(\frac{dT}{dt}\right) \qquad \left(\frac{dv}{dt}\right) = (\gamma z - \alpha x)\left(\frac{dT}{dt}\right) \qquad \left(\frac{dw}{dt}\right) = (\beta x - \gamma y)\left(\frac{dT}{dt}\right)$$

Daher nimmt die erste Gleichung $\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{du}{dz}\right) = 0$ diese Form an:

$$(\alpha y - \beta z)\left(\frac{dT}{dx}\right) + (\gamma z - \alpha x)\left(\frac{dT}{dy}\right) + (\beta x - \gamma y)\left(\frac{dT}{dz}\right) = 0.$$

Dieser Gleichung wird Genüge geleistet, wenn T irgendeine Funktion dieser zwei Größen $\gamma x + \beta y + \alpha z$ und $xx + yy + zz$ war; denn wenn wir festlegen

$$dT = M(\gamma dx + \beta dy + \alpha dz) + N(xdx + ydy + zdz),$$

wird gelten

$$\left(\frac{dT}{dx}\right) = M\gamma + Nx, \quad \left(\frac{dT}{dy}\right) = M\beta + Ny \quad \text{und} \quad \left(\frac{dT}{dz}\right) = M\alpha + Nz.$$

Wir wollen also zur anderen Gleichung fortschreiten; und zuerst wollen wir die Formel

$$u\left(\frac{du}{dx}\right)+v\left(\frac{dv}{dy}\right)+w\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

entwickeln, welche nach den Einsetzungen in diese übergeht

$$TT(\alpha\gamma z+\beta\gamma y-\alpha\alpha x-\beta\beta x).$$

Daher, weil T die Zeit t nicht involviert, wird wegen $\left(\frac{dT}{dt}\right)=0$ auch $\left(\frac{du}{dt}\right)=0$ sein, woher wird

$$\begin{aligned}U &= TT(\alpha\gamma z+\beta\gamma y-\alpha\alpha x-\beta\beta x)\\ V &= TT(\beta\gamma x+\alpha\beta z-\gamma\gamma y-\alpha\alpha y)\\ W &= TT(\alpha\beta y+\alpha\gamma x-\beta\beta z-\gamma\gamma z)\end{aligned}$$

und deshalb

$$\begin{aligned}Udx+Vdy+Wdz = {} & TTd\cdot(\alpha\gamma xz+\beta\gamma xy+\alpha\beta yz-\tfrac{1}{2}(\alpha\alpha+\beta\beta)xx\\ & -\tfrac{1}{2}(\gamma\gamma+\alpha\alpha)yy-\tfrac{1}{2}(\beta\beta+\gamma\gamma)zz)\\ = {} & -\tfrac{1}{2}TTd\cdot((\alpha\gamma-\beta z)^2+(\gamma z-\alpha x)^2+(\beta x-\gamma y)^2).\end{aligned}$$

Weil dieser Ausdruck integrierbar sein muss, ist es notwendig, dass TT und daher auch T eine Funktion dieser Größe ist

$$(\alpha y-\beta z)^2+(\gamma z-\alpha x)^2+(\beta x-\gamma y)^2,$$

welche, weil sie auf diese reduziert wird:

$$(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)(xx+yy+zz)-(\gamma x+\beta y+\alpha z)^2$$

natürlich in der der ersten Bedingung Genüge leistenden allgemeinen Form enthalten ist. Daher gibt die andere Gleichung durch Setzen von

$$(\alpha y-\beta z)^2+(\gamma z-\alpha x)^2+(\beta x-\gamma y)^2=(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)ss,$$

solange für T irgendeine Funktion von s genommen wird, diese Gleichung für den Druck p

$$\frac{2gp}{b}=2gS+(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)\int TTsds+f:t,$$

wobei S die Kräftewirkung $\int(Pdx+Qdy+Rdz)$ ist.

Korollar 1

§84 Die Geschwindigkeit eines Teilchens in Z ist tatsächlich

$$=\sqrt{uu+vv+ww}=Ts\sqrt{\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma};$$

daher, weil T eine Funktion von s ist, wird sie auch eine Funktion der wahren Geschwindigkeit sein. Es ist aber anzumerken, dass die Größe s den Abstand des Punktes Z von der Achse bezeichnet, um welche die Rotation stattfindet.

Korollar 2

§85 Solange die einzelnen Teilchen des Fluids also gleichmäßig um irgendeine Achse rotiert werden, so dass die Geschwindigkeit eines jeden einer Funktion des Abstands proportional ist, kann eine Bewegung von dieser Art in einem Fluid auftreten.

Korollar 3

§86 Für die Realität der Bewegung wird aber weiter verlangt, dass der Druck p einen positiven Wert erhält; und wenn es passiert, dass sein Wert irgendwann einmal negativ ist, ist dort ein vom Fluid freier Raum festzulegen, was passiert, indem ein Festkörper an seine Stelle gesetzt wird.

Bemerkung

§87 Dieses Problem erstreckt sich freilich nicht weiter als das vorhergehende, weil auch hier die Bewegung um eine feste Achse herum stattfindet und es egal ist, welche Lage selbiger zugeteilt wird. Aber dennoch scheint, weil die für die Geschwindigkeiten u, v, w angenommenen Formen zumindest eine allgemeinere Gattung vorgeben, deren Entwicklung nicht wenig an Hilfe, um andere Untersuchungen dieser Art in Angriff zu nehmen, mitzubringen. Denn die ganze Theorie der Bewegung von Fluiden ist ja auf die Auflösung von Gleichungen dieser Art zurückgeführt worden und die ganze Aufgabe geht darauf zurück, dass für u, v, w Formen solcher Art erdacht werden, für welche zuerst die Formel $\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)$ verschwindet, dann aber die Formel $Udz+Vdy+Wdz$ integrierbar wird. Bisher bin ich diese Aufgabe aber so angegangen, dass ich zuerst der ersten Bedingung Genüge geleistet habe, was sich sogar vollkommen allgemein bewerkstelligen ließ, dann mussten aber daraus Fälle solcher Art gefunden werden, in denen auch der zweiten Bedingung genügt werden würde, welche Untersuchung mit den entwickelten Fällen nicht unwesentlich illustriert zu werden und für andere Fälle dieser Art hilfreich zu sein scheint. Wenn wir also in umgekehrter Reihenfolge mit der zweiten Bedingung beginnen wollten, mag die Aufgabe um vieles schwieriger und verzwickter erscheinen, so dass sich hier eine allgemeine Lösung kaum erwarten lässt. Ich habe dennoch einen sich sehr weit erstreckenden Fall bemerkt, in welchem die zweite Bedingung erfüllt ist; dies geschieht natürlich, wenn die Formel $udx + vdy + wdz$ integrierbar war, wo es besonders anzumerken ist, dass dieser Fall bei der Bewegung von Fluiden durch Röhren, in der Bestimmung allein welcher bis jetzt fast die fast ganze Theorie bestanden hat, auftritt; daher glaube ich, dass es der Mühe wert ist, das folgende Kapitel der Entwicklung dieses Falls zu widmen, und das umso mehr, weil er sich auf alle Arten von Fluiden ausdehnen lässt.

KAPITEL V

ÜBER DIE BEWEGUNG VON FLUIDEN IN DEM FALL, IN WELCHEM DIE FORM $udx + vdy + wdz$ INTEGRIERBAR IST

PROBLEM 34

§88 *Wenn die drei Geschwindigkeiten u, v, w eines Elementes des Fluid so beschaffen sind, dass die Formel $udx + vdy + wdz$ eine Integration zulässt, die Gleichung, mit welcher der Druck des Fluids ausgedrückt wird, zu entwickeln.*

LÖSUNG

Weil u, v, w Funktion der vier Variablen x, y, z und t sind, ist das, weil die Formel $udx + vdy + wdz$ integrierbar festgelegt wird, zu verstehen, während die Zeit t konstant angenommen wird. Also sei I ihr vollständiges Integral, was, nachdem auch die Zeit t für variabel gehalten worden ist, differenziert liefere:

$$dI = udx + vdy + wdz + \Phi dt.$$

Daher wird es also, um zuerst die Beschleunigung:

$$U = u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) + \left(\frac{du}{dt}\right)$$

zu finden, für unser Unterfangen überaus nützlich sein, diese Differentialformeln auf das Element dx allein zurückzuführen, was leicht geschieht, während aus der Integrabilität jener Formel gilt

$$\left(\frac{du}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right), \quad \left(\frac{du}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dx}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{du}{dt}\right) = \left(\frac{d\phi}{dx}\right),$$

woher wir erlangen:

$$U = u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dx}\right) + w\left(\frac{dw}{dx}\right) + \left(\frac{d\phi}{dx}\right)$$

und auf die gleiche Weise

$$V = u\left(\frac{du}{dy}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dy}\right) + \left(\frac{d\phi}{dy}\right)$$

$$W = u\left(\frac{du}{dz}\right) + v\left(\frac{dv}{dz}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) + \left(\frac{d\phi}{dz}\right).$$

Weil wir schon, nachdem die Wirkung der beschleunigenden Kräfte P, Q, R:

$$\int (Pdx + Qdy + Rdz) = S$$

und im Element des Fluids, welches wir betrachten, der Druck $= p$ und die Dichte $= q$ gesetzt worden ist, diese Gleichung gefunden haben:

$$\frac{2gdp}{q} = 2gdS - Udx - Vdy - Wdz,$$

in welcher die Zeit t konstant angenommen wird, weil ja in dieser Annahme gilt:

$$dx\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + dy\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) + dz\left(\frac{d\Phi}{dz}\right) = d\Phi,$$

wird, nachdem diese Reduktion in den übrigen Glieder durchgeführt worden ist, gelten

$$Udx + Vdy + Wdz = udu + vdv + wdw + d\Phi;$$

weil diese Form integrierbar ist, werden wir haben:

$$2g\int \frac{dp}{q} = 2gS - \frac{1}{2}(uu + vv + ww) - \Phi + f : t,$$

welche Gleichung Geltung hat, sooft q eine Funktion allein vom Druck p war; wenn sei aber darüber hinaus von anderen Dingen abhängt, ist es, damit diese Gleichung Geltung haben kann, notwendig, dass q eine Funktion sowohl von p als auch dieser Größe ist

$$2gS - \tfrac{1}{2}(uu + vv + ww) - \Phi,$$

andernfalls ist diese Annahme auszuschließen.

KOROLLAR 1

§89 Weil die wahre Geschwindigkeit des Elementes des Fluids $= \sqrt{uu + vv + ww}$ ist, tritt es klar zu tage, dass in dieser Annahme der Druck so von dieser Geschwindigkeit anhängt, dass, umso schneller das Fluid bewegt wird, der Druck umso mehr verringert wird, und das im quadratischen Verhältnis der Geschwindigkeit.

KOROLLAR 2

§90 Wie die Größe Φ in diese Gleichung eingeht, so hängen die drei Geschwindigkeiten u, v, w auch von der Zeit ab, so dass an demselben Ort des Raumes die Bewegung mit der Zeit variiert.

KOROLLAR 3

§91 Die darüber hinaus hinzukommende Funktion der Zeit geht aber allein aus der Veränderung der äußeren Kräfte, von welchen die ganze Masse des Fluids angegriffen wird, hervor; weil diese beliebig ist, muss auch die Funktion an die Umstände angepasst werden. In der Bewegung selbst bringt sie aber nichts durcheinander.

BEMERKUNG

§92 Diese Annahme erstreckt sich so weit, dass fast alle Bewegungen von Fluiden, mit deren Bestimmung die Autoren bis jetzt beschäftigt waren, in sich umfasst; daher könnte es so erscheinen, dass sie für die Bewegung von Fluiden vollkommen notwendig ist, wenn im vorhergehenden Kapitel nicht schon Fälle aufgetaucht wären, in denen diese Eigenschaft nicht entdeckt wird. In Problem 32 haben wir nämlich gesehen, dass die Bewegung bestehen kann, während $u = T$, $v = -Tx$ und $w = 0$ ist, solange T nur eine Funktion von $xx + yy$ war; und in der Tat hat hier die Bedingung unserer Annahme, nach welcher gilt

$$udx + vdy = T(ydx - xdy)$$

allein im Fall $t = \frac{1}{xx+yy}$ Geltung, in welchem die wahre Geschwindigkeit wird

$$\sqrt{uu + vv} = \frac{1}{\sqrt{xx + yy}};$$

obgleich die Bewegung in den übrigen Fällen gleichermaßen bestehen kann. Wenn des Weiteren die Dichte auf irgendeine Weise vom Ort abhängt, oder die Hitze in den verschiedenen Bereichen sehr stark variiert, wird ihre Veränderlichkeit ohne zweifel so unregelmäßig sein können, dass sie auf keine Weise als Funktion der Größe

$$2gS - \tfrac{1}{2}(uu + vv + ww) - \Phi$$

betrachtet werden kann, und unsere Gleichung deshalb keine Integration zulässt, was dennoch für die Realität der Bewegung ganz und gar notwendig ist. Und hier lässt sich nicht wie oben bei dem Gleichgewicht erwidern, dass eine Bewegung in Fällen von dieser Art nicht gegeben sein kann, weil vielmehr deswegen selbst, dass ein Gleichgewicht unmöglich ist, notwendigerweise eine Bewegung existieren muss; es ist also notwendig, dass eine ganz andere Bewegung als die nach der Annahme eintritt, woher sie anzusehen ist, sich nur auf auf gewisse Arten von Bewegungen zu erstrecken. Dann ist aber, weil wir sie noch nicht an die erste Bedingung angepasst haben, noch eine neue Beschränkung nötig, welche wir im folgenden Problem ausfindig machen werden.

PROBLEM 35

§93 *Wenn die Bewegung des Fluids so beschaffen ist, dass die Formel* $udx + vdy + wdz$ *integrierbar ist, die Fälle zu bestimmen, in denen zugleich die erste für die Bewegung erforderte Bedingung erfüllt ist.*

LÖSUNG

Weil, während q die Dichte des Fluids an dem Ort bezeichnet, wo die drei Geschwindigkeiten u, v, w sind, erfordert die erste Bedingung, welche die Beschaffenheit der Dichte an die Hand gegeben hatte, dass gilt

$$\left(\frac{d \cdot qu}{dx}\right) + \left(\frac{d \cdot qv}{dy}\right) + \left(\frac{d \cdot qw}{dz}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0.$$

Nun sei wie zuvor I die Funktion von x, y, z und t, aus welcher werde

$$dI = udx + vdy + wdz + \Phi dt,$$

und weil daher gilt

$$u = \left(\frac{dI}{dx}\right), \quad v = \left(\frac{dI}{dy}\right), \quad w = \left(\frac{dI}{dz}\right),$$

wird die Gleichung ausgeschrieben zu dieser umgeformt werden:

$$q\left(\left(\frac{ddI}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddI}{dy^2}\right) + \left(\frac{ddI}{dz^2}\right)\right) + \left(\frac{dq}{dx}\right)\left(\frac{dI}{dx}\right) + \left(\frac{dq}{dy}\right)\left(\frac{dI}{dy}\right) + \left(\frac{dq}{dz}\right)\left(\frac{dI}{dz}\right) + \left(\frac{dq}{dt}\right) = 0.$$

Also muss die Funktion I notwendigerweise so angenommen werden, dass dieser Gleichung Genüge geleistet wird, was umso schwerer geleistet wird, wenn die Dichte q vom Druck p abhängt, weil dieser erst durch die andere Gleichung

$$\frac{2gdp}{q} = 2gdS - Udu - vdv - Wdw - d\Phi$$

bestimmt werden muss; in diesem Fall wird jene Gleichung also nur sehr schwer aufgelöst werden. Dennoch wird, auf welche Weise auch immer sich diese zwei Gleichungen zugleich erfüllen ließen, daher stets eine Bewegung erhalten, die im Fluid in Bezug auf die Dichte von der Gestalt, welche angenommen worden ist, auftreten können wird. Diese Annahme wird sich daher kaum einmal zu Nutze machen lassen können, wenn die Dichte des Fluids nicht überall und immer konstant oder $q = b$ war, für welchen Fall unsere Gleichungen diese werden:

$$\left(\frac{ddI}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddI}{dy^2}\right) + \left(\frac{ddI}{dz^2}\right) = 0$$

und

$$2gp = 2gbS - \tfrac{1}{2}b(uu + vv + ww + 2\Phi) + f : t.$$

Korollar 1

§94 Nachdem also die Dichte q konstant $= b$ gesetzt worden ist, wird für die Lösung das Finden einer Funktion I von solcher Art verlangt, dass gilt

$$\left(\frac{ddI}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddI}{dy^2}\right) + \left(\frac{ddI}{dz^2}\right) = 0;$$

nachdem aber eine solche Funktion gefunden worden ist, erst dann werden die Geschwindigkeiten bekannt werden

$$u = \left(\frac{dI}{dx}\right), \quad v = \left(\frac{dI}{dy}\right), \quad w = \left(\frac{dI}{dz}\right).$$

KOROLLAR 2

§95 Wenn wir $I = \Gamma : (\alpha x + \beta y + \gamma z)$ setzen, wo freilich die Zeit t in irgendeiner Weise mit eingebracht werden kann, entspringt diese Relation zwischen α, β, γ, dass $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 0$ sein muss; das ist, wenn keine imaginären Größen zugelassen werden, nicht möglich.

KOROLLAR 3

§96 Diesem Umstand in Bezug auf die Funktion kann aber entgegengewirkt werden, wie wenn beispielsweise festgelegt wird

$$I = e^{\alpha x + \beta y}(A \sin(z\sqrt{\alpha\alpha + \beta\beta}) + B\cos(z\sqrt{\alpha\alpha + \beta\beta}))$$

oder

$$I = e^{z\sqrt{\alpha\alpha+\beta\beta}}(A\sin(\alpha x + \beta y) + B\cos(\alpha x + \beta y)),$$

wo die Konstanten A und B die Zeit auf irgendeine Weise beinhalten können.

BEMERKUNG 1

§97 Es ist ersichtlich, dass diese für I gegebenen Werte sehr speziell sind; denn der Wert der vollständigen Funktion müsste zwei beliebige Funktionen umfassen, jede der beiden von zwei variablen Größen, während der in Korollar 2 gegebene Wert eine einzige Funktion einer einzigen Variablen umfasst. Dennoch können die Buchstaben α, β nach Belieben angenommen werden, woher sich leicht unzählige Werte für I darbieten. Wie viele Werte auch immer aber gefunden worden sind, sie liefern zueinander addiert immer einen geeigneten Wert für I. Es können aber unendlich viele andere spezielle Werte dieser Art gefunden werden, indem irgendeine Funktion der Größe $\alpha x + \beta y + \gamma z$ genommen wird, wobei $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma =$ ist und die imaginären Größen nicht berücksichtigt werden, und weil solche Funktionen immer in der Form $M + N\sqrt{-1}$ enthalten sind, ist es immer möglich, daraus unendlich viele Genüge leistende Werte für I zu finden, von welcher Art diese sind:

$$\arctan\frac{M}{N}, \quad e^{\pm M}(A\cos(N) + B\sin(N)), \quad e^{\pm N}(A\cos(M) + B\sin(M)).$$

Weil für M und N also leicht unendlich viele verschiedene Werte angegeben werden können, wird es möglich sein, daraus unendlich mal unendlich viele reelle Werte für I zu erschließen; diese Menge wird darüber hinaus, indem die Größen α, β, γ nach Belieben verändert werden, von welchen immer zwei reell angenommen werden können, ins Unermessliche vervielfältigt werden. Es fehlt aber noch viel, dass die Summe aller Werte von dieser Art für den allgemeinen Wert von I gehalten werden kann.

Bemerkung 2

§98 Bewegungen von dieser Art verwickeln aber meisten Unannehmlichkeiten solcher Art, dass eine Ähnlichkeit zu diesen auf der Welt kaum auftritt, deshalb weil ein Fluid ununterbrochen zu den Orten bewegt wird, wo der Druck negativ und daher die Kontinuität beseitigt wird, und weiter, dass dann in der Wirklichkeit kein Gefäß, um es einzuschließen, verwendet werden kann, wenn es nicht nur gleichzeitig bewegt wird, sondern auch seine Form ständig verändert wird. Es wird genügen, dies an einem einzigen Beispiel gezeigt zu haben. Es sei also $\beta = 0$ und es werde $I = Ae^{\alpha x}\sin(\alpha z)$ genommen, dass gilt

$$u = A\alpha e^{\alpha x}\sin(\alpha z), \quad v = 0 \quad \text{und} \quad w = A\alpha e^{\alpha x}\cos(\alpha z)$$

und daher

$$uu + vv + ww = AA\alpha\alpha e^{2\alpha x}.$$

Das Fluid werde allein von der Schwerkraft in Richtung ZY gedrängt, und es wird $S = h - z$ sein, woher für den Druck hervorgeht

$$2gp = 2gb(h - z) - \tfrac{1}{2}AA\alpha\alpha b e^{2\alpha x},$$

wenn wir freilich denselben Zustand ununterbrochen anzudauern festlegen. Es sei der Kürze wegen $A\alpha = 2\sqrt{gh}$ und der Druck wird verschwinden, wo $z = h(1 - e^{2\alpha x})$ ist. Nachdem also (Fig. 30) OX als horizontale Gerade genommen wurde,

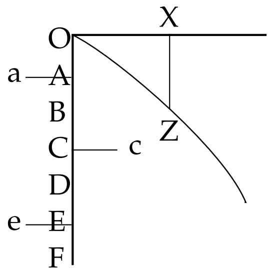


Fig. 30

auf welcher $OX = x$ sei, und auf der Vertikalen, nach unten verlaufend, $XZ = -z$ gesetzt wurde, wird die gekrümmte Linie OZ, auf welcher der Druck verschwindet, eine Logarithmuskurve sein, und unterhalb von dieser werden die Drücke dem Verhältnis zur Tiefe folgen, darüber werden sie hingegen negativ sein, und dort wird also die Kontinuität des Fluids gebrochen. Dennoch wird indes in O, wo $x = 0$ und $z = 0$ ist, $u = 0$ und $w = 2\sqrt{gh}$, so dass das Fluid hier nach oben bewegt wird. Weiter wird die Bewegung auf der vertikalen Gerade OF in der Tiefe $OB = \frac{\pi}{\alpha}$ mit der gleichen Geschwindigkeit $2\sqrt{gh}$ nach unten stattfinden; in D wird es für $OD = \frac{2\pi}{\alpha}$ genommen wiederum gleich schnell nach oben bewegt werden. Nachdem aber dann die Tiefe $OA = \frac{2\pi}{\alpha}$ genommen worden ist, wird es wegen

$$\alpha z = -\frac{\pi}{2} = -90°$$

in einer allein horizontalen Bewegung mit einer Geschwindigkeit $= 2\sqrt{gh}$ in Richtung Aa getragen, in C für $OC = 3OA$ genommen in Cc, in E hingegen wiederum in Richtung Ee. Die Sache wird sich auf die gleiche Weise bei den übrigen zu X vertikal genommenen Geraden verhalten, wenn die Geschwindigkeiten nicht ununterbrochen größer werden. Daher wird eingesehen, dass sich eine Bewegung solcher Art in keinem Gefäß vorgestellt werden kann, außerdem wird eingesehen, dass die Kontinuität des Fluids beim Ansteigen über die Kurve OZ aufgelöst wird, dann aber wird das teilweise aufgelöste Fluid wiederum dort kontinuierlich werden, wo es unter die Kurve Z herabsinkt.

Bemerkung 3

§99 Es ist aber überaus schwierig Bewegungen solcher Art, die in Wirklichkeit nicht existieren können, zu erkennen und allgemein von unseren Gleichungen zu trennen. Der Grund für diesen Umstand scheint besonders darin zu liegen, dass wir die Geschwindigkeiten, mit welchen die einzelnen Elemente des Fluids bewegt werden, auf Punkte des Raumes eingeschränkt haben, weil sich die Geschwindigkeiten u, v und w ja ununterbrochen auf denselben Punkt Z beziehen und zu jeder Zeit die Bewegung des Teilchens, welches sich in Z befindet, aufzeigen, bei welcher Aufgabe wir auf den weiteren Verlauf desselben Teilchens nicht weiter achten. Weil es also bei den meisten Fragen nötig ist, die Bewegung eines Teilchens ununterbrochen zu verfolgen, wie wenn beispielsweise eine wellenförmige oder Schwingungsbewegung ausfindig zu machen ist, werde ich versuchen dieselben Bewegungsgesetze auf dieses Unterfangen anzuwenden. Auf diese Weise werden wir den Vorteil erlangen, dass die eigens zum Bezeichnen der Geschwindigkeit dienenden Buchstaben aus der Rechnung herausfallen, aber an deren Stelle werden andere Variablen einzuführen sein, die den Zustand des Fluids zu einer bestimmten Zeit in sich umfassen. Im folgenden Kapitel werde ich diese Untersuchung also in Angriff nehmen.

Kapitel VI

Über die Bestimmung der Bewegung von Fluiden aus dem Initialzustand

Problem 36

§100 *Nachdem der Initialzustand des Fluids angegeben worden ist, die variablen Größen zu beschreiben, aus welchen darauf folgend der Zustand desselben Fluids nach Verstreichen irgendeiner Zeitspanne bestimmt werden muss.*

Lösung

Im Anfangszustand, für welchen wir die Zeit $t = 0$ genommen haben, wollen wir (Fig. 31) irgendein Element des Fluids betrachten, welches im durch die

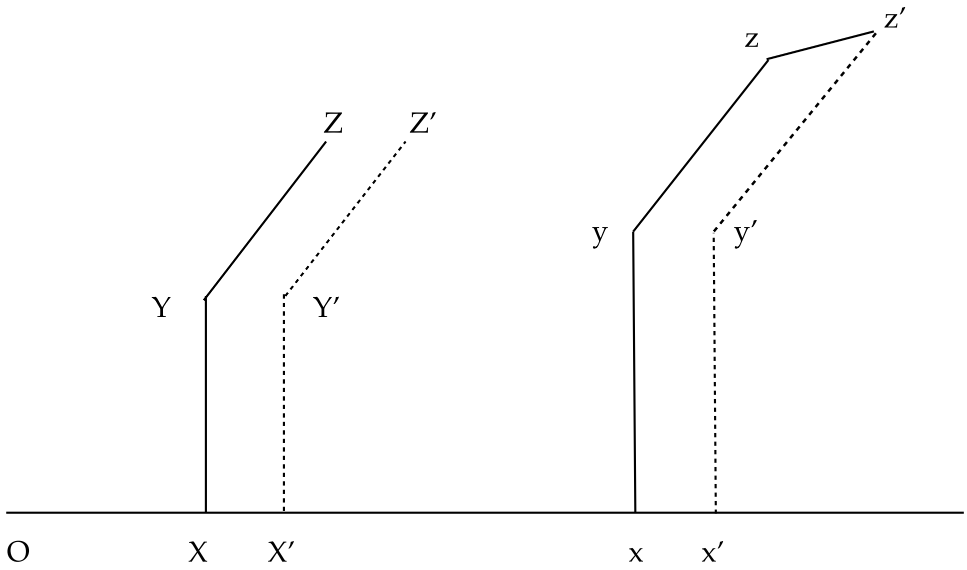


Fig. 31

drei Koordinaten $OX = X$, $XY = Y$ und YZ bestimmten Punkt Z sei, welche also, solange wir dasselbe Element bei der Bewegung verfolgen, konstant bleiben, wenn wir aber auf andere Elemente des Fluids schauen, werden die als variable Größen anzusehen sein. Nun sei dieses Element nach Verstreichen der

Zeit t von Z zu z getragen worden, für welchen Ort wir die Koordinaten $Ox = x$, $xy = y$, $yz = z$ nennen wollen, welche also für Funktionen der vier Größen X, Y, Z und der Zeit t zu halten sind. Daher werden diese Koordinaten x, y, z, wenn unter Beibehalt derselben X, Y, Z allein die Zeit t variiert wird, den ganzen vom Element, welches am Anfang in Z war, sukzessiv zurückgelegten Weg anzeigen. Daher werden, wenn seine Bewegung, während es durch z hindurchgeht, entlang der Koordinaten aufgelöst wird, die Geschwindigkeiten diese sein:

$$\text{in Richtung } Ox = \left(\frac{dx}{dt}\right), \text{ in Richtung } xy = \left(\frac{dy}{dt}\right), \text{ in Richtung } yz = \left(\frac{dz}{dt}\right),$$

und daher werden sie weiter Beschleunigungen in dieselben Richtungen haben, welche sein werden:

$$\text{in Richtung } Ox = \left(\frac{ddx}{dt^2}\right), \text{ in Richtung } xy = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right), \text{ in Richtung } yz = \left(\frac{ddz}{dt^2}\right).$$

Außerdem ist es auch klar, dass jene Funktionen x, y, z mit dieser Eigenschaft versehen sein müssen, dass für verschwindende Zeit t gilt

$$x = X, \quad y = Y \quad \text{und} \quad z = Z,$$

und für $t = 0$ gesetzt werden die gerade dargebotenen Formeln die Anfangsgeschwindigkeiten und Anfangsbeschleunigungen desselben Elementes darbieten, während es noch in Z war.

Es bezeichnet weiter q die Dichte, welche unser Element nach verstreichen der Zeit $= t$ in z haben wird, und auch q wird eine Funktion der vier Variablen X, Y, Z sein, woher es zu jedem Zeitpunkt möglich sein wird die Dichte des Elementes zu bestimmen.

Schließlich sei p der dem sich in z befindenden Element zukommende Druck nach Ablauf der Zeit t, und auch diese Größe wird eine Funktion der vier Variablen X, Y, Z und t sein.

Nachdem diese Dinge festgelegt worden sind, geht die ganze Bestimmung der Bewegung darauf zurück, dass ausfindig gemacht wird, was für Funktionen diese fünf Größen x, y, z, q und p der vier Variablen X, Y, Z und t sind.

KOROLLAR 1

§101 Weil x eine Funktion der vier Variablen X, Y, Z und t ist, wird ihr vollständiges oder aus der Veränderung aller entstandenes Differential dieses sein

$$dx = dX\left(\frac{dx}{dX}\right) + dY\left(\frac{dx}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dx}{dZ}\right) + dt\left(\frac{dx}{dt}\right),$$

welches selbe auf die gleiche Weise über die übrigen Funktionen y, z, p und q festzuhalten ist.

KOROLLAR 2

§102 Wenn wir also dasselbe Element in der winzig kleinen Zeitspanne dt von z zu z' zu gelangen festlegen, werden wegen der für Konstanten zu haltenden X, Y, Z die diesen Ort z' bestimmenden Koordinaten diese sein:

$$Ox' = x + dt\left(\frac{dx}{dt}\right), \quad x'y' = y + dt\left(\frac{dy}{dt}\right), \quad y'z' = z + dt\left(\frac{dz}{dt}\right),$$

dann aber die Dichte in $z' = q + dt\left(\frac{dq}{dt}\right)$ und der Druck ebenda $= p + dt\left(\frac{dp}{dt}\right)$.

KOROLLAR 3

§103 Wenn aber gefragt wird, wo nach derselben Zeit t ein anderes Element, was zu Anfang in Z' war, in einem Z unmittelbar benachbarten Ort entdeckt wird, und die Koordinaten für Z' $X + dX$, $Y + dY$ und $Z + dZ$ sind, wird, wenn der gesuchte Ort in z' festgelegt wird, für diesen sein

$$Ox' = x + dX\left(\frac{dx}{dX}\right) + dY\left(\frac{dx}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dx}{dZ}\right),$$

was dann auch über die zwei übrigen Koordinaten $x'y'$ und $y'z'$ wie für Dichte und den Druck zu verstehen ist.

BEMERKUNG

§104 Um nun die Veränderung so der Dichte wie des Druckes, während sich dasselbe Element des Fluids im unendlich kleinen Zeitabschnitt dt weiter fortbewegt, bestimmen zu können, ist es notwendig, dass wir im Anfangszustand die zwei unmittelbar benachbarten Elemente in Z und Z' zugleich betrachten und deren gegenseitige Lage nach der Zeit t bestimmen. Auf diese Weise wird sich nämlich beurteilen lassen, wie sehr sie darauf folgend in der unendlich kleinen Zeitspanne entweder näher aneinander herankommen sind oder wie sehr sich weiter voneinander wegbewegt haben, weil in jenem Fall die Dichte zunimmt, in diesem hingegen abnimmt. Aber diese Annäherung oder Entfernung dieser zwei Elemente hängt sehr stark von deren gegenseitiger Lage ab, und es kann sogar passieren, dass in derselben unendlich kleinen fluiden Masse zwei aneinander herankommen, wohingegen andere sich voneinander entfernen. Deswegen ist dieses Urteil auf dieselbe Weise zu fällen wie wir es oben gemacht haben, während die Translation einer gewissen unendlich kleinen Masse betrachtet wird, bei welcher Aufgabe dennoch zwei unmittelbar benachbarte Elemente zugleich betrachtet werden müssen, welches selbe auch für die Untersuchung des Drucks verlangt wird, für welches Ziel ich das folgende Problem stelle.

Problem 37

§105 *Wenn nach Ablauf der Zeit t die Dichte q und der Druck p* (Fig. 31) *des sich in z befindenden Elementes, welches am Anfang in Z war, gegeben ist, für dieselbe Zeit die Dichte und den Druck eines anderen unmittelbar benachbarten Elementes in z' zu finden.*

Lösung

Die Koordinaten für den Ort des vorgelegten Elementes in z seien $Ox = x$, $xy = y$, $yz = z$; für das selbigem unmittelbar benachbarte Element in z' seien die Koordinaten aber

$$Ox' = x + \alpha, \quad x'y' = y + \beta, \quad y'z' = z + \gamma,$$

während die Wegstückchen α, β, γ unendlich klein sind. Nachdem nun die Koordinaten für den Ort Z, wo das Element z am Anfang war, $OX = X$, $XY = Y$ und $YZ = Z$ gesetzt worden sind, sei Z' der Ort, wo sich das anderen Element z' am Anfang befunden hatte, und die Koordinaten für diesen seien $OX' = X + dX$, $X'Y' = Y + dY$, $Y'Z' = Z + dZ$, welche Differentiale dX, dY, dZ nun durch jene gegebenen Wegstückchen α, β, γ bestimmt werden müssen. Umgekehrt haben wir aber aus Paragraph 104:

$$\alpha = dX\left(\frac{dx}{dX}\right) + dY\left(\frac{dx}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dx}{dZ}\right)$$

$$\beta = dX\left(\frac{dy}{dX}\right) + dY\left(\frac{dy}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dy}{dZ}\right)$$

$$\alpha = dX\left(\frac{dz}{dX}\right) + dY\left(\frac{dz}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dz}{dZ}\right).$$

Daher wird also

$$\alpha\left(\frac{dy}{dZ}\right) - \beta\left(\frac{dx}{dZ}\right) = dX\left(\left(\frac{dx}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right) - \left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dx}{dZ}\right)\right) + dY\left(\left(\frac{dx}{dY}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right) - \left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dx}{dZ}\right)\right)$$

$$\beta\left(\frac{dz}{dZ}\right) - \gamma\left(\frac{dy}{dZ}\right) = dX\left(\left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right) - \left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right)\right) + dY\left(\left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right) - \left(\frac{dz}{dY}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right)\right).$$

Daher wird, wenn wir der Kürze wegen festlegen:

$$\left.\begin{array}{l}
+\left(\frac{dx}{dX}\right)\left[\left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right) - \left(\frac{dz}{dY}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right)\right] \\
+\left(\frac{dx}{dY}\right)\left[\left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right) - \left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right)\right] \\
+\left(\frac{dx}{dZ}\right)\left[\left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dY}\right) - \left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dY}\right)\right]
\end{array}\right\} = K,$$

erschlossen, dass gelten wird

$$dX = \frac{1}{K}\left\{\begin{array}{lcccc}
+\alpha\Big[& \left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right) & - & \left(\frac{dz}{dY}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right)\Big] \\
+\beta\Big[& -\left(\frac{dx}{dY}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right) & + & \left(\frac{dz}{dY}\right)\left(\frac{dx}{dZ}\right)\Big] \\
+\gamma\Big[& \left(\frac{dx}{dY}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right) & - & \left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dx}{dZ}\right)\Big]
\end{array}\right\}$$

$$dY = \frac{1}{K}\left\{\begin{array}{l} +\alpha\left[\quad \left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right) - \left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right)\right] \\ +\beta\left[\quad \left(\frac{dx}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right) - \left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dx}{dZ}\right)\right] \\ +\gamma\left[- \left(\frac{dx}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right) + \left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dx}{dZ}\right)\right] \end{array}\right\}$$

$$dZ = \frac{1}{K}\left\{\begin{array}{l} +\alpha\left[- \left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dz}{dX}\right) + \left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dY}\right)\right] \\ +\beta\left[\quad \left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dx}{dY}\right) - \left(\frac{dx}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dY}\right)\right] \\ +\gamma\left[\quad \left(\frac{dx}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dY}\right) - \left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dx}{dY}\right)\right] \end{array}\right\}$$

Nachdem die Differentiale nun gefunden worden sind, werden wir für den Ort z' haben

$$\text{die Dichte} = q + dX\left(\frac{dq}{dX}\right) + dY\left(\frac{dq}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dq}{dZ}\right)$$

und

$$\text{der Druck} = p + dX\left(\frac{dp}{dX}\right) + dY\left(\frac{dp}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dp}{dZ}\right).$$

KOROLLAR 1

§106 Jene Größe K, welche in diesen Formeln den Nenner festlegt, wird, nachdem sie ausgeschrieben worden ist, so ausgedrückt:

$$\begin{aligned} K = {} & \left(\frac{dx}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right) + \left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dx}{dY}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right) + \left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dY}\right)\left(\frac{dx}{dZ}\right) \\ & - \left(\frac{dx}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dY}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right) - \left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dx}{dZ}\right) - \left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dx}{dY}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right), \end{aligned}$$

welcher Ausdruck schon frei von der Ordnung der Koordinaten ist.

KOROLLAR 2

§107 Wenn wir, um die Rechnung zur Verkürzen, festlegen:

$$\left(\frac{dx}{dX}\right)=A,\quad \left(\frac{dx}{dY}\right)=D,\quad \left(\frac{dx}{dZ}\right)=G,$$
$$\left(\frac{dy}{dY}\right)=B,\quad \left(\frac{dy}{dZ}\right)=E,\quad \left(\frac{dy}{dX}\right)=H,$$
$$\left(\frac{dz}{dZ}\right)=C,\quad \left(\frac{dz}{dX}\right)=F,\quad \left(\frac{dz}{dY}\right)=I,$$

wird diese Formel übersichtlicher werden:

$$K=ABC+DEF+GHI-AEI-BFG-CDH.$$

KOROLLAR 3

§108 Unter weiterer Verwendungen derselben Zeichen und Bezeichnungen werden wir erhalten

$$dX=\frac{\alpha(BC-EI)+\beta(GI-CD)+\gamma(DE-BG)}{K}$$
$$dY=\frac{\alpha(EF-CH)+\beta(AC-FG)+\gamma(GH-AE)}{K}$$
$$dZ=\frac{\alpha(HI-BF)+\beta(DF-AI)+\gamma(AB-DH)}{K}.$$

KOROLLAR 4

§109 Um diese Formeln noch mehr zusammenzufassen, wollen wir, weil deren Gebrauch sehr umfassend sein wird, weiter festlegen:

$$\begin{aligned} BC-EI&=\mathfrak{A}, & GI-CD&=\mathfrak{D}, & DE-BG&=\mathfrak{G},\\ AC-FG&=\mathfrak{B}, & GH-AE&=\mathfrak{E}, & EF-CH&=\mathfrak{H},\\ AB-DH&=\mathfrak{C}, & HI-BF&=\mathfrak{F}, & DF-AI&=\mathfrak{I}, \end{aligned}$$

dass wir haben

$$dX = \frac{\alpha\mathfrak{A} + \beta\mathfrak{D} + \gamma\mathfrak{G}}{K}, \quad dY = \frac{\alpha\mathfrak{H} + \beta\mathfrak{B} + \gamma\mathfrak{E}}{K}, \quad dZ = \frac{\alpha\mathfrak{F} + \beta\mathfrak{I} + \gamma\mathfrak{C}}{K}.$$

PROBLEM 38

§110 *Nach Verstreichen der Zeit t, wenn das Element in z' dem Element in z unmittelbar benachbart aufgefasst wird, die Bewegung dieses Elementes in z' durch die drei Geschwindigkeiten in Richtung der Koordinaten Ox, xy und yz darzubieten.*

LÖSUNG

Die Geschwindigkeiten des Elementes in z seien wie oben u, v, w und wir haben gesehen, dass aus den hier gebrauchten Benennungen gelten wird

$$u = \left(\frac{dx}{dt}\right), \quad v = \left(\frac{dy}{dt}\right), \quad w = \left(\frac{dz}{dt}\right),$$

und diese Geschwindigkeiten werden in gleicher Weise als Funktionen der vier Variablen X, Y, Z und t anzusehen sein. Wie zuvor mögen die Koordinaten des Punktes z' $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\gamma$ bleiben und Z' sein sein Ort am Anfang, und für diesen sollen die Differentiale dX, dY, dZ durch das vorgehende Problem aus den gegebenen α, β, γ bestimmt werden. Auf diese Weise werden die Geschwindigkeiten des unmittelbar benachbarten Punktes z' sein

$$\text{in Richtung } Ox' = u + dX\left(\frac{du}{dX}\right) + dY\left(\frac{du}{dY}\right) + dZ\left(\frac{du}{dZ}\right)$$

$$\text{in Richtung } x'y' = v + dX\left(\frac{dv}{dX}\right) + dY\left(\frac{dv}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dv}{dZ}\right)$$

$$\text{in Richtung } y'z' = w + dX\left(\frac{dw}{dX}\right) + dY\left(\frac{dw}{dY}\right) + dZ\left(\frac{dw}{dZ}\right)$$

und unter Vermeidung der Buchstaben u, v, w werden sie sich so verhalten

$$\text{in Richtung } Ox' = \left(\frac{dx}{dt}\right) + dX\left(\frac{ddx}{dtdX}\right) + dY\left(\frac{ddx}{dtdY}\right) + dZ\left(\frac{ddx}{dtdZ}\right)$$

$$\text{in Richtung } x'y' = \left(\frac{dy}{dt}\right) + dX\left(\frac{ddy}{dtdX}\right) + dY\left(\frac{ddy}{dtdY}\right) + dZ\left(\frac{ddy}{dtdZ}\right)$$

$$\text{in Richtung } y'z' = \left(\frac{dz}{dt}\right) + dX\left(\frac{ddz}{dtdX}\right) + dY\left(\frac{ddz}{dtdY}\right) + dZ\left(\frac{ddz}{dtdZ}\right),$$

wo anstelle von dX, dY, dZ die zuvor in Termen von α, β, γ gefundenen Werte geschrieben werden müssen.

BEMERKUNG

§111 Wir wollen diese Dinge auf Figur 23 übertragen, wo Z der Punkt sei, welchen wir gerade in z (Fig. 31) betrachtet haben, dessen drei Geschwindigkeiten also diese sind

$$u = \left(\frac{dx}{dt}\right), \quad v = \left(\frac{dy}{dt}\right), \quad w = \left(\frac{dz}{dt}\right),$$

anstelle des jenem unmittelbar benachbarten Punktes z' wollen wir nacheinander die drei Punkte L, M, N betrachten, für welche $ZL = \alpha$, $ZM = \beta$, $ZN = \gamma$ sei. Für den Punkt L muss in den oben für die Differentiale dX, dY, dZ gefundenen Werten $\beta = 0$, $\gamma = 0$ gesetzt werden, für den Punkt M, $\alpha = 0$, $\beta = 0$ und für den Punkt N, $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Daher werden

die Geschwindigkeiten für den Punkt L sein — oben war

$$\text{in Richt. } OX = \left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{A}}{K}\left(\frac{ddx}{dtdX}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{H}}{K}\left(\frac{ddx}{dtdY}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{A}}{K}\left(\frac{ddx}{dtdZ}\right) \qquad u + dx\left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$\text{in Richt. } XY = \left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{A}}{K}\left(\frac{ddy}{dtdX}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{H}}{K}\left(\frac{ddy}{dtdY}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{A}}{K}\left(\frac{ddy}{dtdZ}\right) \qquad v + dx\left(\frac{dv}{dx}\right)$$

$$\text{in Richt. } YZ = \left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{A}}{K}\left(\frac{ddz}{dtdX}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{H}}{K}\left(\frac{ddz}{dtdY}\right) + \frac{\alpha\mathfrak{A}}{K}\left(\frac{ddz}{dtdZ}\right) \qquad w + dx\left(\frac{dw}{dx}\right).$$

Die Geschwindigkeiten des Punktes M werden aber sein oben war

$$\text{in Richt. } OX = \left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\beta}{K}\left[\mathfrak{D}\left(\frac{ddx}{dtdX}\right) + \mathfrak{B}\left(\frac{ddx}{dtdY}\right) + \mathfrak{I}\left(\frac{ddx}{dtdZ}\right)\right] \quad u + dy\left(\frac{du}{dy}\right)$$

$$\text{in Richt. } XY = \left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\beta}{K}\left[\mathfrak{D}\left(\frac{ddy}{dtdX}\right) + \mathfrak{B}\left(\frac{ddy}{dtdY}\right) + \mathfrak{I}\left(\frac{ddy}{dtdZ}\right)\right] \quad u + dy\left(\frac{dv}{dy}\right)$$

$$\text{in Richt. } YZ = \left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{\beta}{K}\left[\mathfrak{D}\left(\frac{ddz}{dtdX}\right) + \mathfrak{B}\left(\frac{ddz}{dtdY}\right) + \mathfrak{I}\left(\frac{ddz}{dtdZ}\right)\right] \quad u + dy\left(\frac{dw}{dy}\right)$$

und schließlich die Geschwindigkeiten des Punktes N diese oben war

$$\text{in Richt. } OX = \left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\gamma}{K}\left[\mathfrak{D}\left(\frac{ddx}{dtdX}\right) + \mathfrak{B}\left(\frac{ddx}{dtdY}\right) + \mathfrak{I}\left(\frac{ddx}{dtdZ}\right)\right] \quad u + dz\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$\text{in Richt. } XY = \left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\gamma}{K}\left[\mathfrak{D}\left(\frac{ddy}{dtdX}\right) + \mathfrak{B}\left(\frac{ddy}{dtdY}\right) + \mathfrak{I}\left(\frac{ddy}{dtdZ}\right)\right] \quad u + dz\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$\text{in Richt. } YZ = \left(\frac{dz}{dt}\right) + \frac{\gamma}{K}\left[\mathfrak{D}\left(\frac{ddz}{dtdX}\right) + \mathfrak{B}\left(\frac{ddz}{dtdY}\right) + \mathfrak{I}\left(\frac{ddz}{dtdZ}\right)\right] \quad u + dz\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

Nachdem diese Formeln angemerkt worden sind, wird das folgende Problem ohne Schwierigkeiten gelöst werden, wenn wir Problem 19 oder Paragraph 12 zur Hilfe nehmen.

Problem 39

§112 *Nachdem die Dinge festgelegt worden sind, die bisher erklärt worden sind, die in einer winzig kleinen Zeitspanne dt stattgefundene Translation des Elementes des Fluids (Fig.* 23*), welches Element die pyramidale Form $ZLMN$ hat, ausfindig zu machen und das Inkrement der Dichte zu bestimmen.*

Lösung

Diese Problem stimmt vollkommen mit dem oberen (18) überein, woher es auch dieselbe Lösung haben wird, wenn nur die Dinge, welche hier in der Bezeichnung geändert worden sind, beachtet werden. Zuerst sind die Pyramidenseiten, welche dort dx, dy, dz waren, hier α, β, γ; darauf werden die Geschwindigkeiten u, v, w hier mit $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ bezeichnet, und die

Differentialformeln $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{dv}{dy}\right)$, $\left(\frac{dw}{dz}\right)$ werden leicht aus dem vorhergehenden Paragraphen entnommen. Weil das Volumen dieser Pyramide in Z daher $= \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma$ war, wird ihr Volumen nach der Translation dieses sein

$$\frac{1}{6}\alpha\beta\gamma + \frac{1}{6}\frac{\alpha\beta\gamma dt}{K}\left\{\begin{array}{lll} +\mathfrak{A}\left(\dfrac{ddx}{dtdX}\right) & +\mathfrak{H}\left(\dfrac{ddx}{dtdY}\right) & +\mathfrak{F}\left(\dfrac{ddx}{dtdZ}\right) \\ +\mathfrak{D}\left(\dfrac{ddy}{dtdX}\right) & +\mathfrak{B}\left(\dfrac{ddy}{dtdY}\right) & +\mathfrak{I}\left(\dfrac{ddy}{dtdZ}\right) \\ +\mathfrak{G}\left(\dfrac{ddz}{dtdX}\right) & +\mathfrak{E}\left(\dfrac{ddz}{dtdY}\right) & +\mathfrak{C}\left(\dfrac{ddz}{dtdZ}\right) \end{array}\right\}.$$

Während diese Pyramide aber in Z war, war ihre Dichte $= q$, nach der Zeitspanne dt ist die Dichte desselben Elementes nach den hier gemachten Annahmen $q + dt\left(\frac{dq}{dt}\right)$. Daher, weil jedes der beiden Volumina durch seine Dichte dividiert dieselbe Masse liefern muss, entspringt daraus die folgende die Beschaffenheit der Dichte bestimmende Gleichung

$$\left\{\begin{array}{llll} & +\ \mathfrak{A}\left(\dfrac{ddx}{dtdX}\right) & +\ \mathfrak{H}\left(\dfrac{ddx}{dtdY}\right) & +\ \mathfrak{F}\left(\dfrac{ddx}{dtdZ}\right) \\ \dfrac{K}{q}\left(\dfrac{dq}{dt}\right) & +\ \mathfrak{D}\left(\dfrac{ddy}{dtdX}\right) & +\ \mathfrak{B}\left(\dfrac{ddy}{dtdY}\right) & +\ \mathfrak{I}\left(\dfrac{ddy}{dtdZ}\right) \\ & +\ \mathfrak{G}\left(\dfrac{ddz}{dtdX}\right) & +\ \mathfrak{E}\left(\dfrac{ddz}{dtdY}\right) & +\ \mathfrak{C}\left(\dfrac{ddz}{dtdZ}\right) \end{array}\right\} = 0,$$

wo die Werte der hier auftauchenden Großbuchstaben aus den Paragraphen 107 und 109 entnommen werden müssen. Weil also daher gilt

$$\left(\frac{ddx}{dtdX}\right) = \left(\frac{dA}{dt}\right), \quad \left(\frac{ddx}{dtdY}\right) = \left(\frac{dD}{dt}\right), \quad \left(\frac{ddx}{dtdZ}\right) = \left(\frac{dG}{dt}\right) \quad \text{etc.},$$

wird, wenn anstelle der germanischen Buchstaben die Werte aus Paragraph 109 geschrieben werden, gelten

$$\left.\begin{array}{rlll} & +\ (BC-EI)\left(\dfrac{dA}{dt}\right) & +\ (EF-CH)\left(\dfrac{dD}{dt}\right) & +\ (HI-BF)\left(\dfrac{dG}{dt}\right) \\ \dfrac{K}{q}\left(\dfrac{dq}{dt}\right) & +\ (GI-CD)\left(\dfrac{dH}{dt}\right) & +\ (AC-FG)\left(\dfrac{dB}{dt}\right) & +\ (DF-AI)\left(\dfrac{dE}{dt}\right) \\ & +\ (DE-BG)\left(\dfrac{dF}{dt}\right) & +\ (GH-AE)\left(\dfrac{dI}{dt}\right) & +\ (AB-DH)\left(\dfrac{dC}{dt}\right) \end{array}\right\} = 0;$$

wenn dieser Ausdruck mit dem Wert des Buchstaben K verglichen wird, welcher dieser ist

$$K = ABC + DEF + GHI - AEI - BFG - CDH,$$

wird leicht erkannt, dass das zweite Glied von jenem auf $\left(\frac{dK}{dt}\right)$ zurückgeführt wird, so dass die Lösung des Problems auf diese einfache Gleichung reduziert wird

$$\frac{K}{q}\left(\frac{dq}{dt}\right) + \left(\frac{dK}{dt}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad K\left(\frac{dq}{dt}\right) + q\left(\frac{dK}{dt}\right) = 0$$

oder auf diese gefälligere

$$\left(\frac{d \cdot Kq}{dt}\right) = 0.$$

Daher sehen wir ein, dass Kq eine Funktion solcher Art sein muss, deren aus der Veränderlichkeit von t allein entstandenes Differential verschwindet, oder eine, welche zu jeder Zeit dieselbe bleibt. Es ist also offenkundig, dass dies nur geschehen kann, wenn Kq eine Funktion nur dieser drei Variablen X, Y, Z und nicht der Zeit ist, woher die Lösung des Problems in dieser Formel enthalten sein wird

$$Kq = f : (X, Y; Z).$$

Korollar 1

§113 Die Größe K wird also durch die Bedingungen bestimmt, von den die Koordinaten x, y, z nach der Zeit t von denen anfänglichen X, Y, Z im Anfangszustand abhängen, so wie ihre im Paragraph 106 dargebotene Form aufzeigt. Weil die Größen x, y, z also notwendigerweise die Zeit t involvieren, ist es notwendig, dass das so geschieht, dass die Betrachtung der Zeit aus der Form Kq völlig herausfällt.

Korollar 2

§114 Wenn die Dichte q des Fluids also eine konstante Größe war, dann darf auch die Form K selbst die Zeit nicht beinhalten. Wenn die Dichte q aber veränderlich war, wird die Größe zu jeder Zeit t angegeben werden können, weil gilt

$$q = \frac{f : (X, Y, Z)}{K}.$$

Korollar 3

§115 Hier muss aber besonders angemerkt werden, dass die Größe q, während die anfänglichen Koordinaten X, Y, Z dieselben bleiben, immer die Dichte desselben Elementes des Fluids ausdrücken; wenn dieses also keine Veränderung in der Dichte zulässt, wird q eine konstante Größe bleiben, obgleich die übrigen Teile des Fluids verschiedene Dichten haben.

Korollar 4

§116 Wenn das Fluid also heterogen oder aus mehreren verschiedenen Fluiden gemischt ist, ist die Weise die Bewegung zu bestimmen sehr viel vorteilhafter als die vorhergehende; weil dort die Größe q nicht auf dasselbe Teilchen des Fluids, sondern auf denselben Ort bezogen wird, so dass sie die Dichten aller Teilchen, die nacheinander durch denselben Punkt hindurchgehen, ausdrückt.

Bemerkung 1

§117 Bei der Lösung dieses Problems wird mit Recht vermisst, dass es erst über viele Umwege auf eine leichte Form gebracht worden ist; und weil schlussendlich quasi zufällig zu einer integrierbaren Differentialgleichung gelangt worden ist, besteht kein Zweifel, dass ein anderer Weg gegeben ist, welcher sofort zu dieser integrierbaren Form führt. Ich bin aber deshalb auf jene Umwege geraten, weil ich die Lösung auf dieselbe Weise, welche ich auch oben gebraucht habe, gegeben habe, obwohl die Art, auf welche wir hier die Bewegung betrachten, einen anderen Weg darlegt zur Lösung zu gelangen. Es werde nämlich im Anfangszustand sofort (Fig. 23) ein Molekül des Fluids in der pyramidalen Form $ZLMN$ betrachtet und die in der endlichen Zeit $= t$ vollführte Translation gesucht. Dann gelange es also in die Lage $zlmn$, welche Form gleichermaßen eine auf irgendeine Weise unregelmäßige Pyramide sein wird; wenn nämlich jemand zweifelt, ob nach der endlichen Zeit $= t$ die Seitenflächen dieser Pyramide immer noch sicher für Ebenen gehalten werden können, so möge er die erste Pyramide $ZLMN$ noch unendlich mal kleiner annehmen, und wie konvex oder konkav die Seitenflächen auch immer zuvor waren, er wird nun anerkennen müssen, dass sie unendlich viel näher an die Form einer Ebene herangekommen sind und daher für Ebenen zu halten sind. Weil wir ja also sofort die anfängliche Pyramide $ZLMN$ als unendlich klein angenommen haben, werden wir im translatierten Zustand auch die Figur $zlmn$ mit Recht und richtig für eine Pyramide halten. Es werde also das Volumen dieser Pyramide $zlmn$ ausfindig gemacht, weil, wenn ihre Dichte nun in z nach Ablauf der Zeit $= t = q$ gesetzt wird, wenn dieses Volumen mit q multipliziert wird, die Masse dieses Moleküls hervorgehen wird; weil diese ununterbrochen dieselbe bleibt, ist sie notwendigerweise eine Funktion solcher Art, die von der Zeit in keiner Weise abhängt; oder diese Masse wird eine Funktion nur dieser drei Variablen X, Y, Z und nicht der Zeit t sein. Daher ist es, weil die vorgehende Lösung schließlich $Kq = f : (X, Y, Z)$ gegeben hat, klar, wenn wir die hier aufgezeigte Methode verwenden, dass das Volumen jenes Moleküls der Größe K proportional gefunden werden muss.

Bemerkung 2

§118 Diese Betrachtung ist dessen ganz und gar würdig, dass wir sie gründlicher weiter verfolgen. Nachdem also für die grundlegende Pyramide $OX = X$, $XY = Y$, $YZ = Z$, dann aber $ZL = dX$, $ZM = dY$ und $ZN = dZ$ gesetzt worden ist, dass ihr Volumen $= \frac{1}{6}dXdYdZ$ ist, seien die Koordinaten für den Punkt z bei der translatierten Pyramide $Ox = x$, $xy = y$ und $yz = z$. Nun werde betrachtet, wenn das Punkt im Anfangszustand mit diesen Koordinaten $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$ bestimmt wird, dass er in der Zeit t zum mit diesen Koordinaten $x + \alpha$, $y + \beta$, $z + \gamma$ bestimmten Punkt translatiert werden wird, wobei gelte

$$\alpha = AdX + ddY + GdZ, \quad \beta = HdX + BdY + EdZ, \quad \gamma = FdX + IdY + CdZ.$$

Daher werden nun aus den vier Punkten der Ausgangspyramide die vier Punkte der translatierten bestimmt, deren Koordinaten sich so verhalten werden:

$$\text{für } z \begin{Bmatrix} Ox & = & x \\ xy & = & y \\ yz & = & z \end{Bmatrix} \quad \text{für } l \begin{Bmatrix} Or & = & x & + & AdX \\ xy & = & y & + & HdX \\ yz & = & z & + & FdX \end{Bmatrix},$$

$$\text{für } m \begin{Bmatrix} Os & = & x & + & DdY \\ sq & = & y & + & BdY \\ qm & = & z & + & IdY \end{Bmatrix}, \quad \text{für } n \begin{Bmatrix} Ot & = & x & + & GdZ \\ to & = & y & + & EdZ \\ on & = & z & + & CdZ \end{Bmatrix},$$

Aus diesen werden nun die Seiten der translatierten Pyramide erschlossen:

$$\begin{aligned}
zl^2 &= (AA + HH + FF)dX^2 \\
zm^2 &= (BB + II + DD)dY^2 \\
zn^2 &= (CC + GG + EE)dZ^2 \\
lm^2 &= (AdX - DdY)^2 + (HdX - BdY)^2 + (FdX - IdY)^2 \\
ln^2 &= (AdX - GdZ)^2 + (HdX - EdZ)^2 + (FdX - CdZ)^2 \\
mn^2 &= (DdY - GdZ)^2 + (BdY - EdZ)^2 + (IdY - CdZ)^2.
\end{aligned}$$

Daraus werden weiter entsprechend der Vorschriften in Paragraph 12 die Kosinus der Winkel zu z bestimmt:

$$\begin{aligned}
\cos(lzm) &= \nu = \frac{AD + BH + FI}{zl \cdot zm} dXdY \\
\cos(lzn) &= \mu = \frac{AG + EH + CF}{zl \cdot zn} dXdZ \\
\cos(mzn) &= \lambda = \frac{DG + BE + CI}{zm \cdot zn} dYdZ.
\end{aligned}$$

Nach Einsetzen dieser Werte dieser Werte wird das Volumen der Pyramide $zlmn$ gefolgert als =

$$\frac{1}{6}dXdYdZ\sqrt{\begin{cases} +(AA+HH+FF)(BB+II+DD)(C+GG+HH) \\ -(AD+BH+FI)^2(CC+GG+EE) \\ -(AG+EH+CF)^2(BB+II+DD) \\ -(DG+BE+CI)^2(AA+HH+FF) \\ +2(AD+BH+FI)(AG+EH+CF)(DG+BE+CI) \end{cases}}$$

wenn diese Form unter dem Wurzelzeichen entwickelt wird, wird sie exakt dem Quadrat der Größe K gleich entdeckt, sodass dieses Volumen $\frac{1}{6}KdXdYdZ$ und deshalb dessen Masse $= \frac{1}{6}KqdXdYdZ$ ist, woher die Größe Kq in keiner Weise von der Zeit t abhängen darf.

PROBLEM 40

§119 *Wenn das Fluid von irgendwelchen beschleunigenden Kräften P, Q, R in Richtung der drei Koordinaten angegriffen wird, eine Gleichung ausfindig zu machen, mit welcher der Druck in den einzelnen Elementes des Fluids bestimmt wird.*

LÖSUNG

Nach Ablauf der Zeit t werde (Fig. 25) irgendein Molekül des Fluids in Z betrachtet, welchem für die Rechnung die Form des Parallelepipeds $ZLMNzlmn$ zugeteilt werde, und nachdem für den Punkt Z die Koordinaten $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ gesetzt worden sind, seien die Seiten dieses Parallelepipeds $ZL = \alpha$, $ZM = \beta$ und $Zz = \gamma$, dass sein Volumen $= \alpha\beta\gamma$ und seine Masse $= q\alpha\beta\gamma$ ist. Nachdem nun der Druck in $z = p$ gesetzt worden ist, welcher eine Funktion der Größen X, Y, Z und der Zeit t ist, wo X, Y, Z die Koordinaten des Punktes sind, wo das Element, welches nun in Z ist, am Anfang gelegen war. Damit daraus also der Druck in L bestimmt wird, die Koordinaten welches Elementes $x + \alpha$, y, z sind, ist zu sehen, wo dieses Element am Anfang war, und aus des vorhergehenden Dingen waren die Koordinaten seines Ortes

$$X + \frac{\alpha(BC - EI)}{K}, \quad Y + \frac{\alpha(EF - CH)}{K}, \quad Z + \frac{\alpha(HI - BF)}{K},$$

woher wir schließen, dass der Druck in L dieser sein wird:

$$p = \frac{\alpha(BC - EI)}{K}\left(\frac{dp}{dX}\right) + \frac{\alpha(EF - CH)}{K}\left(\frac{dp}{dY}\right) + \frac{\alpha(HI - BF)}{K}\left(\frac{dp}{dZ}\right),$$

dessen Übertrag über den Druck p in Z auf die ganze Seitenfläche $LNln$ in die Richtung AO drängt. Die Oberfläche dieser Seite ist aber $= \beta\gamma$, mit welcher multipliziert jener Übertrag die bewegende Kraft gibt, und diese durch die Masse $q\alpha\beta\gamma$ dividiert die beschleunigende Kraft. Daher, weil unser Molekül in Richtung OA mit der beschleunigenden Kraft P angegriffen wird, wird, wenn von dieser jene weggenommen wird, die wahre beschleunigende Kraft in Richtung AO zurückbleiben. Weil die Beschleunigung also $= \left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$ ist, wird man diese Gleichung haben

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 2gP - \frac{2g(BC - EI)}{Kq}\left(\frac{dp}{dX}\right) - \frac{2g(EF - CH)}{Kq}\left(\frac{dp}{dY}\right) - \frac{2g(HI - BF)}{Kq}\left(\frac{dp}{dZ}\right)$$

und auf die gleiche Weise wird für die zwei Übrigen Richtungen aufgefunden:

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 2gQ - \frac{2g(GI - CD)}{Kq}\left(\frac{dp}{dX}\right) - \frac{2g(AC - FG)}{Kq}\left(\frac{dp}{dY}\right) - \frac{2g(DF - AI)}{Kq}\left(\frac{dp}{dZ}\right)$$

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = 2gR - \frac{2g(DE - BG)}{Kq}\left(\frac{dp}{dX}\right) - \frac{2g(GH - AE)}{Kq}\left(\frac{dp}{dY}\right) - \frac{2g(AB - DH)}{Kq}\left(\frac{dp}{dZ}\right).$$

Indem also der Kürze wegen die germanischen Buchstaben aus Paragraph 109 eingeführt werden, erlangen wir die drei Gleichungen für die Bestimmung des Druckes p:

$$\mathfrak{A}\left(\frac{dp}{dX}\right) + \mathfrak{H}\left(\frac{dp}{dY}\right) + \mathfrak{F}\left(\frac{dp}{dZ}\right) = KqP - \frac{Kq}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$$

$$\mathfrak{D}\left(\frac{dp}{dX}\right) + \mathfrak{B}\left(\frac{dp}{dY}\right) + \mathfrak{I}\left(\frac{dp}{dZ}\right) = KqQ - \frac{Kq}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$$

$$\mathfrak{G}\left(\frac{dp}{dX}\right) + \mathfrak{C}\left(\frac{dp}{dY}\right) + \mathfrak{E}\left(\frac{dp}{dZ}\right) = KqR - \frac{Kq}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right).$$

Um daraus die Formel $\left(\frac{dp}{dX}\right)$ zu bestimmen, wollen wir die erste mit $\mathfrak{BC} - \mathfrak{EF} = AK$ multiplizieren, die zweite mit $\mathfrak{EF} - \mathfrak{CH} = HK$ und die dritte mit

$\mathfrak{H}\mathfrak{I} - \mathfrak{B}\mathfrak{F} = FK$, wegen $A\mathfrak{A} + H\mathfrak{D} + F\mathfrak{G} = K$ wird, indem durch KK dividiert wird, aufgefunden werden:

$$\left(\frac{dp}{dX}\right) = q(AP + HQ + FR) - \frac{q}{2g}\left(A\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) + H\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + F\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right)$$

und auf die gleiche Weise wird gefunden:

$$\left(\frac{dp}{dY}\right) = q(DP + BQ + IR) \ - \frac{q}{2g}\left(D\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) + B\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + I\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right)$$

$$\left(\frac{dp}{dZ}\right) = q(GP + EQ + CR) - \frac{q}{2g}\left(G\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) + E\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + C\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right).$$

Weiter werde die erste mit dX multipliziert, die zweite mit dY, die dritte mit dZ, um das Differential des Drucks p zu erhalten, wenn die Zeit t konstant gesetzt wird, und weil in derselben Annahme gilt:

$$AdX + DdY + GdZ = dx, \ \ HdX + BdY + EdZ = dy \ \text{ und } \ FdX + IdY + CdZ = dz,$$

werden unsere drei Gleichungen zu dieser einen verschmelzen:

$$dp = \left(\frac{dp}{dX}\right) = q(Odx + Qdy + Rdz)) - \frac{q}{2g}\left(dx\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) + dy\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + dz\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)\right),$$

in deren Integration die Zeit t für konstant zu halten ist.

Korollar 1

§120 Weil x, y, z Funktion von X, Y, Z und t sind, wird, wenn wir das vollständige Integral festlegen als

$$dx = AdX + DdY + GdZ + Ldt,$$

wird $\left(\frac{dx}{dt}\right) = L$ und daher $\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \left(\frac{dL}{dt}\right)$ sein, anstelle von dx muss aber in dieser Gleichung $AdX + DdY + GdZ$ geschrieben werden, weil in ihr die Zeit als konstant angenommen wird.

Korollar 2

§121 Zuvor haben wir aber gesehen, auf welche Weise auch immer die Dichte q variabel war, dass die Größe Kq die Zeit t nicht beinhaltet. Weil die Wirkung S aber vom Ort, in welchem das Element des Fluids nach der Zeit t aufgefunden wird, abhängt, wird sie natürlich die Zeit in sich einschließen.

Bemerkung

§122 Weil wir bei dieser Lösung zu einer um vieles einfacheren Gleichung gelangt sind als es sich durch die Umwege bei der Rechnung erwarten ließ, besteht kein Zweifel, dass es auch möglich ist, auf einem leichteren und gefälligeren Weg zu derselben Lösung zu gelangen. Aber es tritt in der Tat nicht so klar zutage, auf welche Weise die dorthin führende Rechnung angelegt werden muss, es ist zwar klar, dass die Formel $Pdx + Qdy + Rdz$ das Differential der Kräftewirkung auf das Element ausdrückt, dessen Bewegung wir betrachten, genauso wie in der oberen Lösung. Aber das Differential dp hat hier eine vollkommen andere Bedeutung, während p hier eine Funktion der Variablen X, Y, Z und t ist, und daraus, indem t konstant angenommen wird, berechnet wird, wohingegen p zuvor eine Funktion der Größen x, y, z und t war, aus deren Differentiation, wobei t freilich ebenso als Konstante betrachtet wurde, das Differential genommen wurde; weil hier die Koordinaten x, y, z aber schon selbst die Zeit t involvieren, weicht dieses Differential notwendigerweise vollkommen von jenem ab. Dann weichen aber, auch wenn $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ die Geschwindigkeiten, welche wir oben u, v, w genannt haben, ausdrücken, diese Formeln $\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$ sehr stark von $\left(\frac{du}{dt}\right)$, $\left(\frac{dv}{dt}\right)$, $\left(\frac{dw}{dt}\right)$ ab; denn sie bezeichnen dieselben Beschleunigungen wie die, die wir oben mit den Buchstaben U, V und W bezeichnet haben. Der Grund für den Unterschied ist natürlich darin gelegen, dass wir die Rechnung hier auf vier ganz andere Variablen beziehen als zuvor. Daher haben wir freilich sofort den Vorteil erlangt, dass die erste für die Dichte gefundene Gleichung eine Integration zugelassen hat, wohingegen die andere für den Druck gefundene aber komplizierter zu sein scheint.

PROBLEM 41

§123 *Nachdem* (Fig. 31) *der Anfangszustand irgendeines Fluids und die Kräfte gegeben wurden, deren Wirkung das Fluid standhält, die Bewegung, von welcher es darauf getragen wird, und seinen Zustand zu jedem Zeitpunkt ausfindig zu machen.*

LÖSUNG

Im Anfangszustand wollen wir irgendein Teilchen in Z betrachten, dessen Ort mit den drei Koordinaten $OX = X$, $XY = Y$ und $YZ = Z$ bestimmt werde: Dann sei aber die Dichte desselben Teilchens $= Q$, der Druck hingegen $= P$. Außerdem sei die Bewegung so beschaffen, dass sie aufgelöst die Geschwindigkeiten $OX = U$, $XY = V$ und $YZ = W$ liefert. Weil der Anfangszustand also bekannt ist, werden Q, P, U, V, W gegebene Funktionen der drei variablen X, Y, Z sein. Nachdem nun eine Zeit $= t$ verstrichen ist, wird dasselbe Teilchen, welches zu Anfang in Z war, zu z gelangt sein, dessen Ort mit den ähnlichen Koordinaten $Ox = x$, $xy = y$ und $yz = z$ bestimmt werde, welche also als Funktionen der vier Variablen X, Y, Z und t sind, so beschaffen, dass, nachdem die Zeit $t = 0$ gesetzt worden ist, sie in die Anfangskoordinaten X, Y und Z übergehen, woraus folgt, dass in demselben Fall $t = 0$ gelten wird:

$$\left(\frac{dx}{dX}\right) = 1, \quad \left(\frac{dy}{dX}\right) = 0, \quad \left(\frac{dz}{dX}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{dx}{dY}\right) = 0, \quad \left(\frac{dy}{dY}\right) = 1, \quad \left(\frac{dz}{dY}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{dx}{dZ}\right) = 0, \quad \left(\frac{dy}{dZ}\right) = 0, \quad \left(\frac{dz}{dZ}\right) = 1.$$

Deswegen werden aber die drei Geschwindigkeiten desselben Teilchens, während es nach der Zeit $= t$ durch den Punkt z hindurchfließt, diese sein

$$\text{in Richtung } Ox = \left(\frac{dx}{dt}\right) = u, \ \text{ in Richtung } xy = \left(\frac{dy}{dt}\right) = v, \ \text{ in Richtung } yz = \left(\frac{dz}{dt}\right) = w,$$

woher, während die Zeit t verschwindet, notwendigerweise wird

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = U, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right) = V, \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dt}\right) = W.$$

Nun werde weiter die Dichte des nun durch z hindurchgehenden Teilchens $= q$ und der Druck $= p$ gesetzt, welche zwei Größen ebenso Funktionen der vier Variablen X, Y, Z und t sein werden, so beschaffen, dass für $t = 0$ gesetzt $q = Q$ und $p = P$ wird.

Schließlich werden die beschleunigenden Kräfte, von welchen das Teilchen in z angegriffen wird, auf diese reduziert

$$\text{in Richtung } Ox = \mathfrak{P}, \quad \text{in Richtung } xy = \mathfrak{Q}, \quad \text{in Richtung } yz = \mathfrak{R}.$$

Nachdem diese Dinge festgelegt worden sind, ist es ersichtlich, dass die Erkenntnis der Bewegung darauf zurückgeht, dass bestimmt, Funktionen der Variablen X, Y, Z und t welcher Art die Größen x, y, z, q und p sind, und diese Bestimmung ist aus den zwei folgenden Gleichungen zu entnehmen.

Für die erste werde aus den Variablen x, y, z diese Größe gesucht:

$$K = \begin{matrix} + \left(\frac{dx}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right) + \left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dY}\right)\left(\frac{dx}{dZ}\right) + \left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dx}{dY}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right) \\ - \left(\frac{dx}{dX}\right)\left(\frac{dz}{dY}\right)\left(\frac{dy}{dZ}\right) - \left(\frac{dz}{dX}\right)\left(\frac{dy}{dY}\right)\left(\frac{dx}{dZ}\right) - \left(\frac{dy}{dX}\right)\left(\frac{dx}{dY}\right)\left(\frac{dz}{dZ}\right) \end{matrix}$$

woher aus dem zuvor Erwähnten feststeht, dass für $t = 0$ gesetzt $K = 1$ sein wird. Weil wir also in Problem 39 gesehen haben, dass, während die Bewegung andauert, für dasselbe Teilchen die Größe kQ ununterbrochen denselben Wert beibehält, muss ihr Wert natürlich jenem gleich sein, welchen sie am Anfang für $t = 0$ gesetzt hat, dann wird aber $K = 1$ und $q = Q$. Deshalb wird die erste die Bestimmung der Bewegung enthaltene Gleichung diese sein

$$Kq = Q \quad \text{und daher} \quad q = \frac{Q}{K}.$$

Die andere Gleichung haben wir im vorhergehenden Problem gefunden, wo der Buchstabe g eingeführt wird, der die Höhe des Falles von schweren

Körpern in der Zeit von einer Minutensekunde anzeigt, und das mit dem Ziel, dass die Zeit t in Minutensekunden und die Geschwindigkeiten durch in einer Minutensekunde zurückgelegte Strecken ausgedrückt werden. Daher wird also die andere die Bestimmung der Bewegung enthaltende Gleichung diese sein:

$$\frac{2gdp}{q} = 2g(\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy + \mathfrak{R}dz) - dx\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) - dy\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) - dz\left(\frac{ddz}{dt^2}\right),$$

in welcher Differentialgleichung sittsam zu bemerken ist, dass die Zeit t konstant angenommen wird und allein die anfänglichen Koordinaten X, Y, Z wie Variablen behandelt werden. Daher, weil x, y, z darüber hinaus die Zeit t involvieren, sind deren Differential dx, dy, dz entsprechend zu nehmen. Wenn aber das Integral gefunden worden ist, wird es gefällig sein, diesem anstelle einer Konstante irgendeine Funktion der Zeit hinzuzufügen.

KOROLLAR 1

§124 Wie die zweite Gleichung aus dreien entstanden ist, so enthält sie auch drei Bestimmungen, mit denen es zu bewirken ist, dass sie integrierbar ist. Nachdem also die erste und darüber hinaus aus der Natur des Fluids die Relation zwischen der Dichte und Druck hinzugenommen worden ist, hat man insgesamt fünf Bestimmungen, und daher genauso viele wie nötig sind, um die fünf gesuchten Funktionen x, y, z, q, p zu definieren.

KOROLLAR 2

§125 Nachdem aber das Integral der zweiten Gleichung gefunden worden ist, wird man, wenn dann die Koordinaten X, Y, Z als Konstanten angesehen werden und allein die Zeit t als variabel angenommen wird, die ganze Bewegung des Teilchens des Fluids haben, welches am Anfang in Z war; und daher wird zu jeder Zeit so sein Ort und seine Bewegung wie die Dichte und der Druck angegeben werden können.

KOROLLAR 3

§126 Wenn dieses Teilchen, welches am Anfang in Z war, keine Veränderung seiner Dichte zulässt, wird unterbrochen $q = Q$ und daher aus der ersten

Gleichung $K = 1$ sein. Daraus wird also, indem anstelle von K der oben angegebene Wert eingesetzt wird, eine gewisse Relation zwischen x, y, z bestimmt, wie sie von den anfänglichen Koordinaten X, Y, Z anhängen müssen.

Bemerkung 1

§127 Wenn wir die andere Gleichung aufmerksamer betrachten, lässt sich aus ihrer Form vermuten, auf welche Weise sie aus der Theorie der angreifenden Kräfte abzuleiten ist. Im Anfangszustand werden nämlich die zwei unmittelbar nebeneinander liegenden Punkte Z und Z' betrachtet, von welchen jener mit den Koordinaten X, Y, Z, dieser hingegen mit diesen $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$ bestimmt wird. Nun werden diese zwei Punkte nach Ablauf einer Zeit $= t$ zu z und z' hinübergetragen, während die Koordinaten von jenem x, y, z, von diesem hingegen $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ sind, wo sittsam bemerkt werde, dass die Inkremente dx, dy, dz aus der Differentiation der Funktionen x, y, z, wobei die Zeit t konstant angenommen wird, zu nehmen sind, sodass sie allein aus der Veränderlichkeit der anfänglichen Koordinaten X, Y, Z resultieren. Das Intervall zz' werde $= ds$ genannt, welches ein fluides Molekül mit zylindrischer oder prismatischer Form völlig ausfülle, die Basis welches Zylinders $= \delta\delta$ sei, und sein Volumen wird $= \delta\delta ds$ und die Masse $= q\delta\delta ds$ sein. Weil ja der Druck in $z = p$ gesetzt wird, wird der Druck in $z' = p + dp$ sein, während dp das Differential der Funktion p bezeichnet, was aus der Veränderlichkeit der Koordinaten X, Y, Z allein und daher konstant angenommener Zeit t entsteht. Dieses Molekül zz' wird also vom Übertrag des Druckes auf die Basis z' über den auf die Basis z in Richtung $z'z$ mit einer bewegenden Kraft $= \delta\delta dp$ gedrängt, welche durch die Masse $q\delta\delta ds$ dividiert die beschleunigende Kraft $= \frac{dp}{qds}$ in dieselbe Richtung $z'z$ gibt. Weil aber die beschleunigenden Kräfte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ in die Richtungen Ox, xy, yz vorhanden sind, werde aus diesen die Kraft entlang der Richtung zz' erschlossen, welche $= \frac{\mathfrak{P}) + \mathfrak{Q}dy + \mathfrak{R}dz}{ds}$ aufgefunden wird, so dass nun die ganze beschleunigende Kraft in die Richtung zz' diese ist

$$= \frac{\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}dy + \mathfrak{R}dz}{ds} - \frac{dp}{qds}.$$

Nachdem diese gefunden worden ist, werden die Beschleunigungen der Bewegung betrachtet, welche wir in die Richtungen Ox, xy, yz gesehen haben $\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$ zu sein, und aus ihnen werde die Beschleunigung in die

Richtung zz' abgeleitet, welche hervorgeht als:

$$\frac{dx}{ds}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)+\frac{dy}{ds}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)+\frac{dz}{ds}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right),$$

und aus den Bewegungsgesetzen muss diese Beschleunigung jener beschleunigenden Kraft mit $2g$ multipliziert gleich sein; und daher entspringt durch Multiplizieren mit ds die andere die Natur der Bewegung enthaltende Gleichung selbst; es wäre also möglich gewesen, diese sofort ohne so lange Umwege zu finden. Bei dieser fast unberührten Art von Kalkül ist es aber gewiss von größter Bedeutung, dieselbe Gleichung auf mehr als eine Weise gefunden zu haben, weil daher die Natur dieser neuen Analysis nicht unwesentlich illustriert wird.

Bemerkung 2

§128 Weil ich beschlossen habe, hier nur die Prinzipien anzugeben, möchte ich zumindest im Kurzen den Gebrauch dieser Formeln zeigen. Zuerst wollen wir also für eine progressive oder eine Parallelbewegung der einzelnen Punkte festlegen:

$$x=X+L,\quad y=Y+M,\quad z=Z+N,$$

während L, M, N Funktionen solcher Art der Zeit t allein sind, welche für $t=0$ gesetzt verschwinden. Weil also $\left(\frac{dx}{dX}\right)=1$, $\left(\frac{dy}{dY}\right)=1$, $\left(\frac{dz}{dZ}\right)=1$ ist, alle übrigen Differentialformeln hingegen verschwinden, wird $K=1$ und $q=Q$ sein, woher die Dichte eines jeden Elementes dieselbe bleibt; oder diese Annahme erstreckt sich auf ein keiner Kompression fassungsfähiges Fluid: Dennoch wird indes, wenn es aus heterogenen Materien besteht, im Anfangszustand Q wie eine Funktion von X, Y und Z angesehen werden können. Es wirke allein die Schwerkraft in die Richtung zy, dass $\mathfrak{P}=0$, $\mathfrak{Q}=0$ und $\mathfrak{R}=-1$ ist, und die andere Gleichung wird diese sein:

$$\frac{2gdp}{Q}=-2gdZ-dX\frac{ddL}{dt^2}-dY\frac{ddM}{dt^2}-dZ\frac{ddN}{dt^2};$$

damit diese Gleichung integriert werden kann, muss die Dichte Q überall dieselbe und daher $Q=b$ sein, und so wird das Integral diese sein:

$$\frac{2g}{b}p=2g(h-Z)-X\cdot\frac{ddL}{dt^2}-Y\cdot\frac{ddM}{dt^2}-Z\cdot\frac{ddN}{dt^2}+f:t;$$

wenn also die Bewegung nicht gleichförmig ist, wird die oberste Oberfläche nicht horizontal sein.

Als nächstes wollen wir den Fall untersuchen, in welchem die einzelnen Elemente um eine vertikale Achse in den parallelen horizontalen Ebenen rotiert werden. Für dieses Ziel sei der Winkel θ irgendeine Funktion der Zeit t und es werde festgelegt:

$$x = X\cos(\theta) - Y\sin(\theta), \quad y = Y\cos(\theta) + X\sin(\theta), \quad z = Z,$$

daher wird wegen

$$\left(\frac{dx}{dX}\right) = \cos(\theta), \quad \left(\frac{dx}{dY}\right) = -\sin(\theta), \quad \left(\frac{dy}{dY}\right) = \cos(\theta), \quad \left(\frac{dy}{dX}\right) = \sin(\theta), \quad \left(\frac{dz}{dZ}\right) = 1$$

wird $K = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ berechnet. Daher werde die Dichte wie zuvor konstant $q = Q = b$ gesetzt. Darauf wird aufgefunden

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dx}{dt}\right) &= -(X\sin(\theta) + Y\cos(\theta))\frac{d\theta}{dt}, \\
\frac{ddx}{dt^2} &= -(X\sin(\theta) + Y\cos(\theta))\frac{dd\theta}{dt^2} + (Y\sin(\theta) - X\cos(\theta))\frac{d\theta^2}{dt^2}, \\
\left(\frac{dy}{dt}\right) &= -(Y\sin(\theta) - X\cos(\theta))\frac{d\theta}{dt}, \\
\frac{ddx}{dt^2} &= -(Y\sin(\theta) + X\cos(\theta))\frac{dd\theta}{dt^2} + (X\sin(\theta) + Y\cos(\theta))\frac{d\theta^2}{dt^2},
\end{aligned}$$

woher nach der Substitution die andere Gleichung zu dieser wird

$$\frac{2gdp}{b} = -2gdZ + (YdX + XdY)\frac{dd\theta}{dt^2} + (XdX + YdY)\frac{d\theta^2}{dt^2};$$

weil dort t und θ für Konstanten zu halten sind, geht durch Integrieren hervor

$$\frac{2gp}{b} = 2g(h - Z) + XY\frac{dd\theta}{dt^2} + \tfrac{1}{2}(XX + YY)\frac{d\theta^2}{dt^2} + f : t.$$

Weil sich für θ hier irgendeine Funktion der Zeit annehmen lässt, erstreckt sich diese Bewegung um vieles weiter als die, welche wir oben, der ersten Methode folgend, entwickelt haben, weshalb diese andere Methode anzusehen ist einen riesigen Nutzen zu haben.

Bemerkung 3

§129 Ich verfolge die hier erwähnten Fälle nicht weiter, weil es hier nur vorgelegt ist, die Idee über die Anwendung dieser letzteren Methoden darzustellen, außerdem weil eine weitere Entwicklung so dieser wie der vorhergehenden Methode eines gewaltigen Fortschritts in der Analysis bedarf, bevor sich irgendetwas mit Erfolg erwarten lässt. Weil diese ganze Analysis von Funktionen vierer Variablen handelt, während der Teil, der in Funktionen von nur zwei Variablen besteht, kaum begonnen worden ist, entwickelt zu werden, wäre es gewiss unüberlegt eine so schwere Aufgabe plötzlich anzugehen. Um also schrittweise zu dieser allgemeinen Untersuchung der Bewegung von Fluiden zu gelangen, scheint mit den einfacheren Fällen, wo weniger Variablen auftauchen, begonnen werden zu müssen. Und hier werden wir ähnlich wie in der Geometrie die Theorie der Bewegung von Fluiden am besten und sehr vorteilhaft in drei Teile aufteilen, die *lineare* Bewegung, die *ebene* Bewegung und die *räumliche* Bewegung; von diesen haben die zwei ersten, auch wenn sie durch Abstraktion der dritten, also den räumlichen Bewegungen, gebildet worden sind, dennoch einen eigenen Nutzen. Den die meisten Dinge, die bis jetzt über die Bewegung von Fluiden erforscht worden sind, zählen zum Fluss durch Gräben oder Röhren; auch wenn sie nicht unendlich eng angenommen werden, wird sich das Fluid dennoch nicht anders durch sie bewegt zu werden aufgefasst als wenn sie es wären, weil in den einzelnen transversalen Schnitten keine Ungleichheit in der Bewegung zugelassen wird. So lässt sich die Bewegung eines Fluids durch Röhren dieser Art mit Recht lineare Bewegung nennen. Der zweite Teil ist die Bewegung auf Ebenen oder vielmehr beliebigen Oberflächen, in welchem Teil dem bewegten Fluid nur zwei Dimensionen zugeschrieben werden, während die dritte Dimension natürlich als keiner Ungleichheit der Bewegung unterworfen betrachtet wird. Erst nachdem diese zwei teile genauer entwickelt worden sind, werden wir die vollständige Behandlung in allen drei Dimensionen mit größeren Ertrag angehen können.